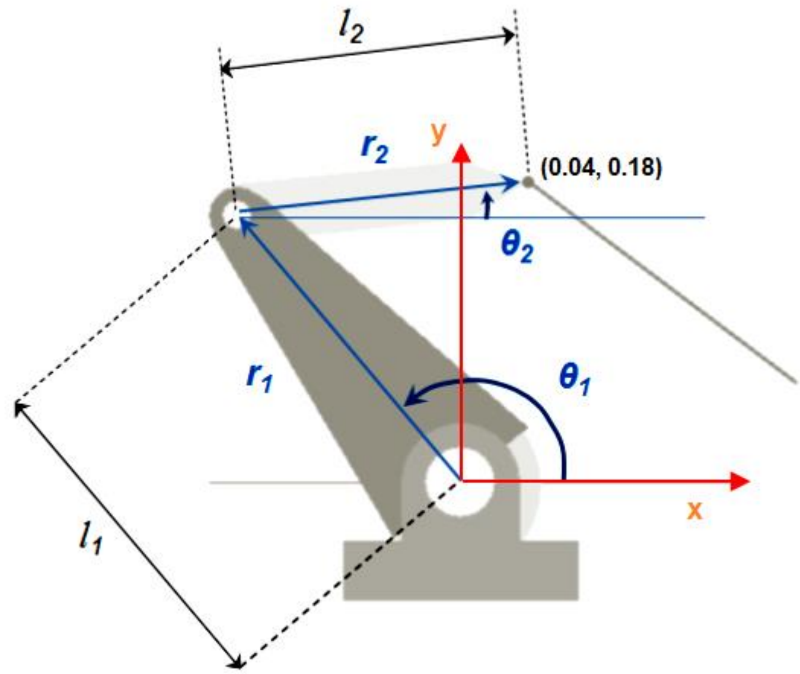
Cinemática Inversa de un Manipulador de 2 Grados de Libertad.

Consideremos la representación gráfica del manipulador:



Considerando que las coordenadas del órgano terminal del manipulador son valores conocidos de una trayectoria, la suma de vectores desde la base del manipulador a un punto con coordenadas (x, y) queda definida como:

$$l_1 \cos\theta_1 + l_2 \cos\theta_2 = x$$

$$l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + l_2 \operatorname{sen}\theta_2 = y$$

Por nomenclatura, $\cos\theta_i$ se refiere al coseno del ángulo θ_i y $\operatorname{sen}\theta_i$ se refiere al seno del ángulo θ_i.

Para determinar los ángulos, se procederá a reducir estas dos ecuaciones a una ecuación que será resuelta con el método numérico de Newton-Raphson.

Para ello, se procederá a eliminar el ángulo θ_1 manipulador ambas ecuaciones de la siguiente manera:

$$l_2 \cos\theta_2 = x - l_1 \cos\theta_1$$

$$l_2 \operatorname{sen}\theta_2 = y - l_1 \operatorname{sen}\theta_1$$

Elevando al cuadrado ambas ecuaciones y sumando, resulta:

$${l_2}^2 (\cos^2\theta_2 + \operatorname{sen}^2\theta_2) = x^2 - 2xl_1\cos\theta_1 - 2yl_1\operatorname{sen}\theta_1 + y^2 + {l_1}^2 (\cos^2\theta_1 + \operatorname{sen}^2\theta_1)$$

Recordando la propiedad trigonométrica:

$$(\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta) = 1$$

La ecuación fundamental para aplicar el método numérico de Newton-Raphson es:

$$F(\theta_1) = 0 = -{l_2}^2 + x^2 + y^2 + {l_1}^2 - 2xl_1\cos\theta_1 - 2yl_1\operatorname{sen}\theta_1$$

Derivando esta última ecuación con respecto a θ_1, resulta

$$\dot{F}(\theta_1) = 2xl_1\operatorname{sen}\theta_1 - 2yl_1\cos\theta_1$$

Por lo que la ecuación recursiva en diferencias al aplicar el método numérico resulta ser:

$${\theta_1}_{i+1} = {\theta_1}_i - \frac{-{l_2}^2 + x^2 + y^2 + {l_1}^2 - 2xl_1\cos{\theta_1}_i - 2yl_1\operatorname{sen}{\theta_1}_i}{2xl_1\operatorname{sen}{\theta_1}_i - 2yl_1\cos{\theta_1}_i}$$

Considerando la posición gráfica del manipulador, se puede considerar que una primera aproximación del ángulo $\theta_1$es aproximada a 120 °.

Por otra parte, recordando las ecuaciones:

$$l_1 \cos\theta_1 + \ l_2 \cos\theta_2 = x$$

$$l_1 \operatorname{sen}\theta_1 + \ l_2 \operatorname{sen}\theta_2 = y$$

Se procederá ahora a eliminar el ángulo θ_2 , para ello, se procederá manipular ambas ecuaciones de la siguiente manera:

$$l_1 \cos\theta_1 = x - \ l_2 \cos\theta_2$$

$$l_1 \operatorname{sen}\theta_1 = y - \ l_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

Efectuando el mismo procedimiento de elevar al cuadrado ambas ecuaciones y sumando el resultado, al simplificar la ecuación F(θ_1) resulta ser:

$$F(\theta_2) = -{l_1}^2 + x^2 + y^2 + {l_2}^2 - 2xl_2 \cos\theta_2 - 2yl_2 \operatorname{sen}\theta_2$$

Al derivar esta última ecuación, aplicando el método de Newton-Raphson se obtiene la ecuación recursiva en diferencias:

$$\theta_{2_{i+1}} = \ \theta_{2_i} - \frac{-{l_1}^2 + x^2 + y^2 + {l_2}^2 - 2xl_2 \cos\theta_{2_i} - 2yl_2 \operatorname{sen}\theta_{2_i}}{2xl_2 \operatorname{sen}\theta_{2_i} - 2yl_2 \cos\theta_{2_i}}$$

Nuevamente, considerando la posición gráfica del manipulador, se puede considerar que una primera aproximación del ángulo θ_2 es aproximada a 9 °.

De esta forma, dado el punto con coordenadas (0.04,0.18) y ángulos iniciales de $\theta_1 \approx 120$ ° y $\theta_2 \approx 9$ °. Al aplicar las ecuaciones recursivas, los resultados en la cuarta iteración:

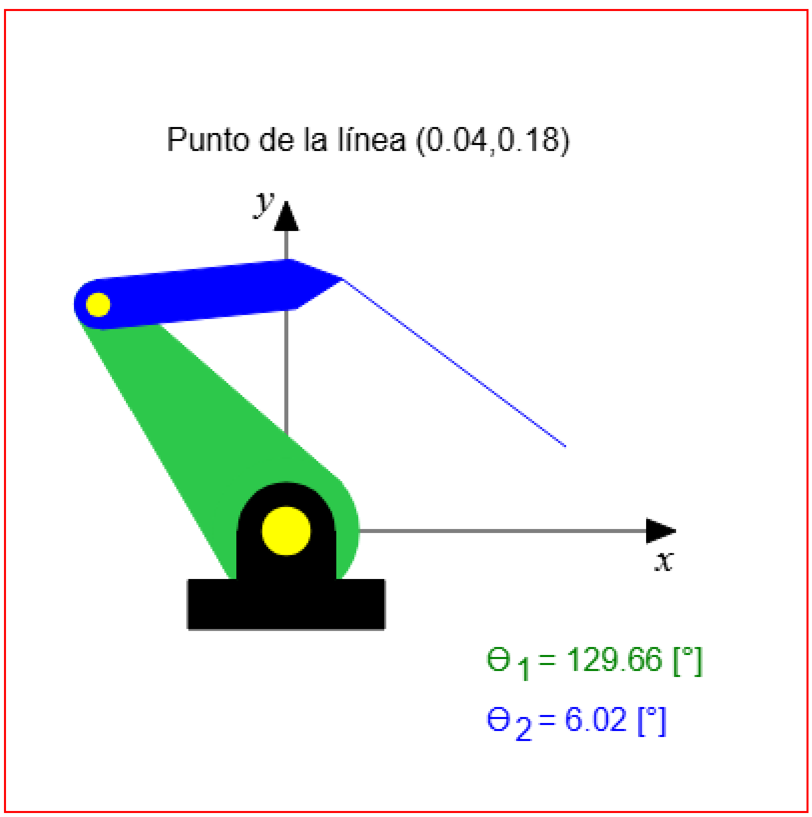
n	θ_1 [grados]	θ_2 [grados]
0	120	9
1	130.5033094	5.72343339
2	129.6675099	6.01511044
3	129.6628402	6.01535696
4	129.6628401	6.01535696

Una vez que se ha planteado las ecuaciones generales recursivas que determinan los ángulos del manipulador dado un punto (x,y), lo siguiente es generar una sucesión de puntos para una trayectoria determinada dentro del espacio de trabajo del manipulador.

Convencionalmente, se expresa la trayectoria en el plano X-Y como funciones paramétricas con respecto al tiempo cuando se desea generar automáticamente una tarea de manipulación; o bien, mover de forma dirigida el manipulador a través de una trayectoria definida.

Cinemática Inversa

Manipulador de 2 Grados de Libertad



Porcentaje de la línea recta

0