



ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL

Facultad de Ingeniería en Electricidad y Computación

**“MODELAMIENTO Y SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE LLENADO DE
DOS TANQUES EN SERIE”.**

INFORME DE MATERIA DE GRADUACIÓN

Previa a la obtención del Título de:

**INGENIERO EN ELECTRICIDAD ESPECIALIZACIÓN ELECTRÓNICA Y
AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL**

Presentado por:

Maybe Carolina Escalante Tomalá.

Walter Joel Villacreses Mendieta.

GUAYAQUIL – ECUADOR

2015

AGRADECIMIENTO

En primer lugar gracias a Dios que nos brindó fortaleza y sabiduría para culminar nuestra carrera universitaria; en segundo lugar, a nuestros padres, que con su amor y sacrificio nos han formado como personas de bien

Agradecemos a nuestro mentor PhD. Douglas Plaza, quien ha tenido la paciencia y la dedicación de impartirnos sus conocimientos en este último proyecto universitario.

Gracias a todas las personas que de una u otra manera formaron parte de esta etapa de nuestra vida.

DEDICATORIA

Este trabajo es dedicado a nuestros padres todo esto nunca hubiera sido posible sin su apoyo incondicional, sin sus consejos y palabras de motivación que nos dieron aliento para no rendirnos en el camino.

Con todo mi cariño y amor por tu paciencia y comprensión, preferiste sacrificar tu tiempo para que yo pudiera cumplir con el mío. Por tu bondad y sacrificio me inspiraste a ser mejor para ti, ahora puedo decir que esta tesis lleva mucho de ti, gracias por estar siempre a mi lado.

TRIBUNAL DE SUSTENTACIÓN

Ing. Douglas Plaza Guingla, PhD
PROFESOR DE LA MATERIA DE GRADUACIÓN

Ing. Luis Fernando Vásquez Vera M.Sc.
PROFESOR DELEGADO POR LA UNIDAD ACADÉMICA.

DECLARACIÓN EXPRESA

“La responsabilidad del contenido de este Informe, nos corresponde exclusivamente a nosotros; y el patrimonio intelectual de la misma a la ESCUELA SUPERIOR POLITÉCNICA DEL LITORAL”

(Reglamento de Graduación de la ESPOL)

Maybe Carolina Escalante Tomalá

Walter Joel Villacreses Mendieta

RESUMEN

El objetivo principal es modelar y simular el comportamiento de un sistema de llenado de dos tanques en serie, ante diferentes tipos de entrada, específicamente, entrada escalón, impulso y rampa; para ello se hace uso de los programas de simulación tales como: Matlab/Simulink, Scilab/Xcos y (Open) Modelica, al mismo tiempo se busca evaluar el desempeño de estos programas.

Para simular el sistema en primer lugar se halla el modelo matemático del mismo, se ha tomado como modelo base el sistema de un solo tanque, facilitando distinguir las leyes físicas que lo rigen, mediante análisis matemático se obtienen las ecuaciones diferenciales de ambos modelos de uno y dos tanques, para así, observar que el modelo de interés, es no lineal, por ende se ha linealizado, logrando obtener las funciones de transferencias respectivas para la simulación.

Una vez simulado en cada uno de los programas, se realiza una comparación entre el simulador posicionado, Matlab y los de licencia gratuita, Scilab y Modelica, mediante la obtención de valores de frontera a diferentes tiempos de simulación, se tiene como resultado que el programa Matlab puede ser sustituido por Modelica, ya que posee el menor margen de diferencia y más aun beneficiando a los usuarios por su accesibilidad

ÍNDICE GENERAL

DEDICATORIA.....	III
TRIBUNAL DE SUSTENTACIÓN.....	IV
DECLARACIÓN EXPRESA.....	V
RESUMEN.....	VI
ÍNDICE GENERAL.....	VII
ÍNDICE DE FIGURAS.....	X
ÍNDICE DE TABLAS.....	XVII
ABREVIATURAS Y SIMBOLOGÍA.....	XVIII
INTRODUCCIÓN.....	XX
CAPÍTULO 1	
1. Conceptos Preliminares.....	1
1.1. Sistemas.....	1
1.1.1. Clasificación de los sistemas.....	2
1.2. Señales.....	6
1.2.1. Clasificación de las señales:.....	8
1.3. Modelos.....	11
1.3.1. Clasificación de los modelos.....	11
1.4. Estado.....	11
CAPÍTULO 2.	
2. Modelos matemáticos de los sistemas.....	13
2.1. Qué es un modelo matemático?.....	13
2.1.1. Ecuaciones diferenciales (input-output) white box.....	15
2.1.2. Identificación de sistemas. (black box).....	17

2.1.3.	Redes neuronales (Grey Box).....	18
2.2.	Modelos input-output.....	19
2.2.1.	Sistemas de 1 ^{er} orden.....	22
2.2.1.1.	Respuesta ante la entrada escalón.....	24
2.2.1.2.	Respuesta ante la entrada impulso.....	28
2.2.1.3.	Respuesta ante la entrada rampa.....	30
2.2.2.	Sistemas de 2 ^{do} orden.....	32
2.2.2.1.	Respuesta transitoria ante una entrada escalón unitario.....	36
2.2.2.2.	Respuesta transitoria ante una entrada impulso.....	45
2.2.2.3.	Respuesta transitoria ante una entrada rampa.....	48
2.2.3.	Sistemas de orden superior.....	48
2.3.	Linealización.....	51

CAPÍTULO 3

3.	Modelamiento matemático de un sistema de llenado de dos tanques en serie.....	54
3.1.	Modelo matemático de un sistema de llenado de un tanque.....	55
3.2.	Modelo Matemático de un sistema de llenado de dos tanques en serie.....	62
3.3.	Modelo Matemático de un sistema de llenado de tres tanques en serie.....	72
3.4.	Diseño del tanque.....	81

CAPÍTULO 4

4.	Utilización de simuladores para modelamiento de sistemas.....	82
4.1.	Matlab.....	82
4.1.1.	Por qué usar Matlab?.....	83
4.1.2.	Desarrollo de la herramienta de simulación.....	84

4.1.2.1.	Análisis del sistema de un solo tanque con entradas Step, Impulse, Rampa mediante Script y Simulink.....	91
4.1.2.2.	Análisis del sistema de dos tanque en serie con entradas Step, Impulse, Rampa mediante Script y Simulink.	105
4.2.	Scilab.....	119
4.2.1.	Por qué usar Scilab?.....	119
4.2.2.	Desarrollo de la herramienta de Simulación.....	120
4.2.2.1.	Análisis del sistema de un solo tanque con entradas Step, Impulse, Rampa mediante Script y Xcos.	124
4.2.2.2.	Análisis del sistema de dos tanques en serie con entradas Step, Impulse, Rampa mediante Editor y Xcos.....	132
4.3.	Modelica.	139
4.3.1.	Por qué usar Openmodelica?.....	140
4.3.2.	Desarrollo de la herramienta de Simulación.....	140
4.3.2.1.	Análisis de un solo tanque con entradas Step, Impulse, Rampa mediante Diagram view y Text view.....	144
4.3.2.2.	Análisis de dos tanques en serie con entradas Step, Impulse, Rampa mediante Diagram view y Text view.	158
	RESULTADOS.....	168
	CONCLUSIONES.....	171
	RECOMENDACIONES.....	173
	BIBLIOGRAFÍA.....	175

ÍNDICE DE FIGURAS

FIGURA 1. 1. REPRESENTACIÓN DE UN SISTEMA. $X(T)$, ENTRADA; $Y(T)$, SALIDA.....	2
FIGURA 1. 2. CLASIFICACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS.....	2
FIGURA 1. 3 TIPOS DE VARIABLES DE UN SISTEMA.....	12
FIGURA 2. 1 CICLO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA.....	14
FIGURA 2. 2 MODELO GENERAL INPUT-OUTPUT.	20
FIGURA 2. 3 MODELO SISO.	21
FIGURA 2. 4 MODELO MISO.....	21
FIGURA 2. 5 MODELO SIMO.....	21
FIGURA 2. 6 MODELO MIMO.	22
FIGURA 2. 7 RESPUESTA AL ESCALÓN UNITARIO PRIMER ORDEN.....	27
FIGURA 2. 8 RESPUESTA AL IMPULSO PRIMER ORDEN.....	30
FIGURA 2. 9 RESPUESTA A LA ENTRADA RAMPA PRIMER ORDEN.	31
FIGURA 2. 10 LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES.	33
FIGURA 2. 11 PARÁMETROS QUE CARACTERIZAN LA RESPUESTA.	35
FIGURA 2. 12 CASO SUB-AMORTIGUADO ENTRADA ESCALÓN.....	38
FIGURA 2. 13 RESPUESTA A LA ENTRADA IMPULSO SEGUNDO ORDEN SOBRE- AMORTIGUADO Y SUB-AMORTIGUADO.....	47
FIGURA 2. 14 RESPUESTA A LA RAMPA SOBRE-AMORTIGUADO Y SUB-AMORTIGUADO. ...	48
FIGURA 3. 1. REPRESENTACIÓN DEL LLENADO DE UN TANQUE.....	56
FIGURA 3. 2. REPRESENTACIÓN ELÉCTRICA DE UN TANQUE.....	59
FIGURA 3. 3. SISTEMA REAL DE DOS TANQUES EN SERIE.	63
FIGURA 3. 4. REPRESENTACIÓN ELÉCTRICA DE DOS TANQUES EN SERIE	67
FIGURA 3. 5. REPRESENTACIÓN REAL DE TRES TANQUES EN SERIE.	73

FIGURA 3. 6. REPRESENTACIÓN ELÉCTRICA DEL LLENADO DE TRES TANQUES.....	75
FIGURA 4. 1. LIBRERÍA DE SIMULINK.....	85
FIGURA 4. 2. ÁREA DE TRABAJO DEL EDITOR.	90
FIGURA 4. 3. CÓDIGO DE MATLAB ENTRADA ESCALÓN.....	92
FIGURA 4. 4. CONSTRUCCIÓN DE LOS BLOQUES DE LA ECUACIÓN NO LINEAL DE UN TANQUE.....	93
FIGURA 4. 5. CONSTRUCCIÓN DE LOS BLOQUES DE LA ECUACIÓN LINEAL DE UN TANQUE.....	93
FIGURA 4. 6. DISEÑO PARA COMPARACIÓN DE ECUACIONES LINEALES Y NO LINEALES. ...	94
FIGURA 4. 7. PARÁMETROS ENTRADA STEP.....	94
FIGURA 4. 8. RESPUESTA EN EL CÓDIGO ENTRADA ESCALÓN.....	95
FIGURA 4. 9. RESPUESTA EN SIMULINK ENTRADA ESCALÓN.....	96
FIGURA 4. 10. CÓDIGO DE MATLAB ENTRADA IMPULSO UN TANQUE.....	97
FIGURA 4. 11. CONSTRUCCIÓN DEL BLOQUE DE LA F. TRANSFERENCIA DE UN TANQUE. .	98
FIGURA 4. 12. PARÁMETROS STEP1.....	99
FIGURA 4. 13. PARÁMETROS STEP.....	99
FIGURA 4. 14. PANEL DE TRANSFER FNC1.....	100
FIGURA 4. 15. RESPUESTA DEL CÓDIGO ENTRADA IMPULSO.....	100
FIGURA 4. 16. RESPUESTA EN SIMULINK ENTRADA IMPULSO.....	101
FIGURA 4. 17. CÓDIGO MATLAB ENTRADA RAMPA.....	102
FIGURA 4. 18. CONSTRUCCIÓN DEL BLOQUE DE TRANSFERENCIA DE UN TANQUE.....	103
FIGURA 4. 19. PARÁMETROS RAMPA.....	103
FIGURA 4. 20. RESPUESTA DEL CÓDIGO ENTRADA RAMPA.....	104
FIGURA 4. 21. RESPUESTA EN SIMULINK ENTRADA RAMPA.....	105
FIGURA 4. 22. CÓDIGO MATLAB ENTRADA ESCALÓN.....	106

FIGURA 4. 23. CONSTRUCCIÓN DE BLOQUES DE LA FUNCIÓN NO LINEAL DE DOS TANQUES.	107
FIGURA 4. 24. CONSTRUCCIÓN DE BLOQUES DE LA FUNCIÓN LINEAL DE DOS TANQUES	107
FIGURA 4. 25. COMPARACIÓN DE SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES.	108
FIGURA 4. 26. RESPUESTA DEL CÓDIGO ENTRADA ESCALÓN A) TANQUE UNO B) TANQUE DOS.....	109
FIGURA 4. 27. RESPUESTA EN SIMULINK TANQUE UNO A) NO LINEAL B) LINEAL	110
FIGURA 4. 28. RESPUESTA EN SIMULINK TANQUE DOS A) NO LINEAL B) LINEAL	111
FIGURA 4. 29. PROGRAMA DEL SISTEMA DE DOS TANQUES EN SERIE ANTE UNA ENTRADA IMPULSO	112
FIGURA 4. 30. DISEÑO DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA A) TANQUE UNO B) TANQUE DOS.	113
FIGURA 4. 31. RESPUESTA DEL CÓDIGO ENTRADA IMPULSO A) TANQUE UNO B) TANQUE DOS.....	113
FIGURA 4. 32 RESPUESTA EN SIMULINK DEL TANQUE UNO	114
FIGURA 4. 33. RESPUESTA EN SIMULINK DEL TANQUE UNO	114
FIGURA 4. 34. CÓDIGO MATLAB ENTRADA RAMPA	115
FIGURA 4. 35. CONSTRUCCIÓN DE FUNCIONES DE TRANSFERENCIA A) TANQUE UNO B) TANQUE DOS.....	116
FIGURA 4. 36. RESPUESTA CÓDIGO A) TANQUE UNO B) TANQUE DOS.	117
FIGURA 4. 37. RESPUESTA EN SIMULINK TANQUE DOS.....	118
FIGURA 4. 38. RESPUESTA EN SIMULINK TANQUE UNO.	118
FIGURA 4. 39. ÁREA DE TRABAJO XCOS.	120
FIGURA 4. 40. LIBRERÍAS XCOS.....	120

FIGURA 4. 41. CÓDIGO SCILAB ENTRADA ESCALÓN	124
FIGURA 4. 42. DESARROLLO DE LA ECUACIÓN NO LINEAL DE UN TANQUE.....	125
FIGURA 4. 43. DESARROLLO DE LA ECUACIÓN LINEAL	125
FIGURA 4. 44. DESARROLLO DE LAS ECUACIONES PARA LA COMPARACIÓN A) NO LINEAL B)LINEAL	126
FIGURA 4. 45. ESCALÓN-EDITOR UN TANQUE A) NO LINEAL B) LINEAL C) ESCALÓN.	127
FIGURA 4. 46. CÓDIGO SCILAB ENTRADA IMPULSO	128
FIGURA 4. 47. IMPULSO-XCOS DESARROLLO DE FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA UN TANQUE.	128
FIGURA 4. 48. IMPULSO-EDITOR UN TANQUE.....	129
FIGURA 4. 49. IMPULSO-XCOS UN TANQUE.....	129
FIGURA 4. 50. CÓDIGO SCILAB ENTRADA RAMPA.....	130
FIGURA 4. 51. RAMPA-XCOS DESARROLLO DE LA FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA UN TANQUE.	130
FIGURA 4. 52 RAMPA-EDITOR UN TANQUE.	131
FIGURA 4. 53 RAMPA-XCOS UN TANQUE.	131
FIGURA 4. 54 CÓDIGO SCILAB ENTRADA ESCALÓN.	132
FIGURA 4. 55 DESARROLLO DE LAS ECUACIONES DE DOS TANQUES A) NO LINEALES B) LINEALES.	132
FIGURA 4. 56 ESCALÓN-EDITOR DOS TANQUES.	133
FIGURA 4. 57 ESCALÓN-XCOS TANQUE UNO.....	133
FIGURA 4. 58 ESCALÓN-XCOS TANQUE DOS.....	134
FIGURA 4. 59 CÓDIGO SCILAB ENTRADA IMPULSO.....	134

FIGURA 4. 60 IMPULSO-XCOS F. TRANSFERENCIA DOS TANQUES A) TANQUE UNO B) TANQUE DOS.....	135
FIGURA 4. 61 IMPULSO-EDITOR DOS TANQUES A) TANQUE UNO B)TANQUE DOS.....	135
FIGURA 4. 62 IMPULSO-XCOS DOS TANQUES – TANQUE UNO.....	136
FIGURA 4. 63 IMPULSO-XCOS DOS TANQUES – TANQUE DOS.....	136
FIGURA 4. 64 CÓDIGO SCILAB ENTRADA RAMPA.....	137
FIGURA 4. 65 DESARROLLO XCOS F. TRANSFERENCIA DOS TANQUES RAMPA.	137
FIGURA 4. 66 RAMPA-EDITOR DOS TANQUES A)TANQUE UNO B)TANQUE DOS.....	138
FIGURA 4. 67 XCOS- RAMPA TANQUE UNO.....	138
FIGURA 4. 68 RAMPA-XCOS DOS TANQUES – TANQUE DOS.....	139
FIGURA 4. 69 LIBRERÍAS OPENMODELICA.....	140
FIGURA 4. 70 SELECCIÓN DEL ÁREA DE TRABAJO.	143
FIGURA 4. 71 REFERENCIA SIMULATION SETUP.....	143
FIGURA 4. 72 PARÁMETROS SIMULATION SETUP.....	144
FIGURA 4. 73 ÁREA DE TRABAJO TEXT VIEW.....	145
FIGURA 4. 74 ÁREA DE TRABAJO DIAGRAM VIEW.....	145
FIGURA 4. 75 CÓDIGO MODELICA ENTRADA ESCALÓN, UN TANQUE NO LINEAL.....	146
FIGURA 4. 76 CÓDIGO MODELICA ENTRADA ESCALÓN, UN TANQUE LINEAL.....	147
FIGURA 4. 77 PARÁMETROS DE STEP.....	147
FIGURA 4. 78 DESARROLLO DE ECUACIONES EN DIAGRAM-VIEW UN TANQUE.	148
FIGURA 4. 79 TEXT VIEW UN TANQUE NO LINEAL.....	148
FIGURA 4. 80 TEXT VIEW UN TANQUE LINEAL.....	149
FIGURA 4. 81 DIAGRAM VIEW UN TANQUE LINEAL Y NO LINEAL.	149
FIGURA 4. 82 ESTRUCTURA DE UN ALGORITHM.....	150

FIGURA 4. 83 ENTRADA IMPULSO- MODELICA.....	150
FIGURA 4. 84 PARÁMETROS_STEPS.....	151
FIGURA 4. 85 CÓDIGO MODELICA ENTRADA IMPULSO, UN TANQUE NO LINEAL.....	151
FIGURA 4. 86 CÓDIGO MODELICA ENTRADA IMPULSO, UN TANQUE NO LINEAL.....	152
FIGURA 4. 87 DIAGRAM VIEW TRANSFER FUNCTION UN TANQUE IMPULSO.....	152
FIGURA 4. 88 UN TANQUE TEXT VIEW NO LINEAL.....	153
FIGURA 4. 89 UN TANQUE TEXT VIEW LINEAL.....	153
FIGURA 4. 90 DIAGRAM VIEW UN TANQUE.....	154
FIGURA 4. 91 PARÁMETROS DE RAMPA.....	154
FIGURA 4. 92 CÓDIGO MODELICA ENTRADA RAMPA, UN TANQUE NO LINEAL.....	155
FIGURA 4. 93 CÓDIGO MODELICA ENTRADA RAMPA, UN TANQUE LINEAL.....	155
FIGURA 4. 94 DIAGRAMA VIEW UN TANQUE TRANSFERFUNCTION.....	156
FIGURA 4. 95 TEXT VIEW UN TANQUE NO LINEAL.....	156
FIGURA 4. 96 TEXT VIEW UN TANQUE LINEAL.....	157
FIGURA 4. 97 DIAGRAM VIEW UN TANQUE.....	157
FIGURA 4. 98 CÓDIGO MODELICA ENTRADA ESCALÓN, DOS TANQUES NO LINEAL.....	158
FIGURA 4. 99 CÓDIGO MODELICA ENTRADA ESCALÓN, DOS TANQUES LINEAL.....	159
FIGURA 4. 100 DIAGRAM VIEW SISTEMA NO LINEAL DOS TANQUES-ESCALÓN.....	159
FIGURA 4. 101 DIAGRAM VIEW SISTEMA LINEAL DOS TANQUES-ESCALÓN.....	160
FIGURA 4. 102 SIMULADO DE ECUACIONES NO LINEALES ENTRADA ESCALÓN.....	160
FIGURA 4. 103 SIMULADO DE ECUACIONES LINEALES ENTRADA ESCALÓN.....	161
FIGURA 4. 104 SIMULADO DE ECUACIONES NO LINEALES ENTRADA ESCALÓN-DIAGRAM.	161
FIGURA 4. 105 SIMULADO DE ECUACIONES LINEALES ENTRADA ESCALÓN-DIAGRAM....	162

FIGURA 4. 106 CÓDIGO MODELICA ENTRADA IMPULSO, DOS TANQUES NO LINEAL.....	162
FIGURA 4. 107 CÓDIGO MODELICA ENTRADA IMPULSO, DOS TANQUES LINEAL.....	163
FIGURA 4. 108 DIAGRAM VIEW, DOS TANQUES TRANSFERFUNCTION.....	163
FIGURA 4. 109 DOS TANQUES ENTRADA IMPULSO NO LINEAL-TEXT.....	164
FIGURA 4. 110 DOS TANQUES ENTRADA IMPULSO LINEAL-TEXT.....	164
FIGURA 4. 111 DOS TANQUES ENTRADA IMPULSO-DIAGRAM.....	165
FIGURA 4. 112 CÓDIGO MODELICA ENTRADA RAMPA, DOS TANQUES NO LINEAL.	165
FIGURA 4. 113 CÓDIGO MODELICA ENTRADA RAMPA, DOS TANQUES NO LINEAL.	166
FIGURA 4. 114 TRANSFERFUNCTION-DIAGRAM VIEW RAMPA.	166
FIGURA 4. 115 RAMPA DOS TANQUES LINEAL.	167
FIGURA 4. 116 DIAGRAM VIEW DOS TANQUES SOLUCIÓN.....	167

ÍNDICE DE TABLAS

TABLA 1 VALOR DE LOS PARÁMETROS.	81
TABLA 2 RESULTADOS COMPARATIVOS DE MATLAB, SCILAB, MODELICA EN EL LLENADO DE UN TANQUE (NO LINEAL).	168
TABLA 3 ERRORES ENTRE DATOS DE SIMULADORES, LLENADO DE UN TANQUE (NO LINEAL).	169
TABLA 4 RESULTADOS COMPARATIVOS DE MATLAB, SCILAB, MODELICA EN EL LLENADO DE DOS TANQUES (TANQUE UNO-NO LINEAL).	169
TABLA 5 ERRORES ENTRE DATOS DE SIMULADORES, LLENADO DE DOS TANQUES (TANQUE UNO-NO LINEAL).	170
TABLA 6 RESULTADOS COMPARATIVOS DE MATLAB, SCILAB, MODELICA EN EL LLENADO DE DOS TANQUES (TANQUE DOS-NO LINEAL).	170
TABLA 7 ERRORES ENTRE DATOS DE SIMULADORES, LLENADO DE DOS TANQUES (TANQUE DOS-NO LINEAL).	170

ABREVIATURAS Y SIMBOLOGÍA

$\delta(t)$	Función impulso
$\mu(t)$	Función escalón
$r(t)$	Función rampa
τ	Constante de tiempo
k	Ganancia
\mathcal{L}	Transformada de Laplace
\mathcal{L}^{-1}	Transformada inversa de Laplace
ξ	Factor de amortiguamiento
σ	Atenuación
w_n	Velocidad angular
w_d	Frecuencia de amortiguamiento
Φ	Ángulo de apertura de polos
t_s	Tiempo de establecimiento
t_p	Tiempo de pico

M_p	Sobreoscilación
t_r	Tiempo de subida
A	Área de la base del tanque
A_s	Área de la sección que une los tanques
$q_0(t)$	Caudal de entrada
$q(t)$	Caudal de salida
h_0	Nivel del agua tanque 1
ρ	Densidad
h_2	Nivel del tanque 2
h_3	Nivel del tanque 3

INTRODUCCIÓN

Simular y a su vez modelar sistemas reales mediante ecuaciones matemáticas es una de las herramientas más aplicadas en la Ingeniería, hoy en día se abre un abanico de programas de simulación, que cumplen tales exigencias, talvez unos más estilizados y desarrollados que otros, sin embargo todos son útiles.

Ya que cada vez es más difícil la adquisición de la licencia de ciertos programas, como Matlab, han surgido tanto como para el estudiante u otro tipo de usuarios, softwares libres, por ejemplo: Scilab y Modelica; sin embargo queda la inquietud de cuál resulta ser el mejor, el ya avanzado y desarrollado Matlab, creado en los años 70, que por su tiempo en el mercado ha logrado evolucionar y posicionarse, adaptándose a las necesidades de los usuarios alrededor del mundo, o los programas libres que están siendo cada vez más utilizados como Scilab y Modelica, cuya acogida en el continente Europeo ha sido mayor que en cualquier otro lugar, sin embargo gracias a su accesibilidad y a su constante desarrollo, están bajo la mira de todo el mundo.

Para despejar esa inquietud, serán comparados mediante la simulación de un sistema de llenado de dos tanques en serie, a partir de esta experiencia se definirá cual resulta ser el más conveniente.

CAPÍTULO 1

1. Conceptos Preliminares.

En este capítulo, se describirá algunos conceptos básicos de dinámica de sistemas, para lograr ser más objetivos en el desarrollo del proyecto.

1.1. Sistemas

Un sistema es un conjunto de componentes, elementos o dispositivos que se relacionan entre sí, para satisfacer una funcionalidad, si ocurriera un cambio en algún elemento, todo el sistema se vería afectado.

Para el respectivo análisis del sistema, debemos saber que componentes lo conforman y la manera en que estos se vinculan, para así decidir qué elementos forman parte de él y cuáles no, ya que se deberá considerar los que afecten el comportamiento en gran magnitud, de no ser así el sistema se convertiría complejo y de difícil

manejo. Un sistema puede, a la vez, ser parte de un sistema mayor a estos se los llama subsistemas. Los sistemas aceptan señales $x(t)$, la transforman y generan otras señales en su salida $y(t)$, como lo podemos observar en la figura 1.1.



Figura 1. 1. Representación de un sistema. $x(t)$, entrada; $y(t)$, salida

Los sistemas reales abarcan intercambios de energía, información o materia con su entorno. Se clasifica de la siguiente forma:

1.1.1. Clasificación de los sistemas.

z

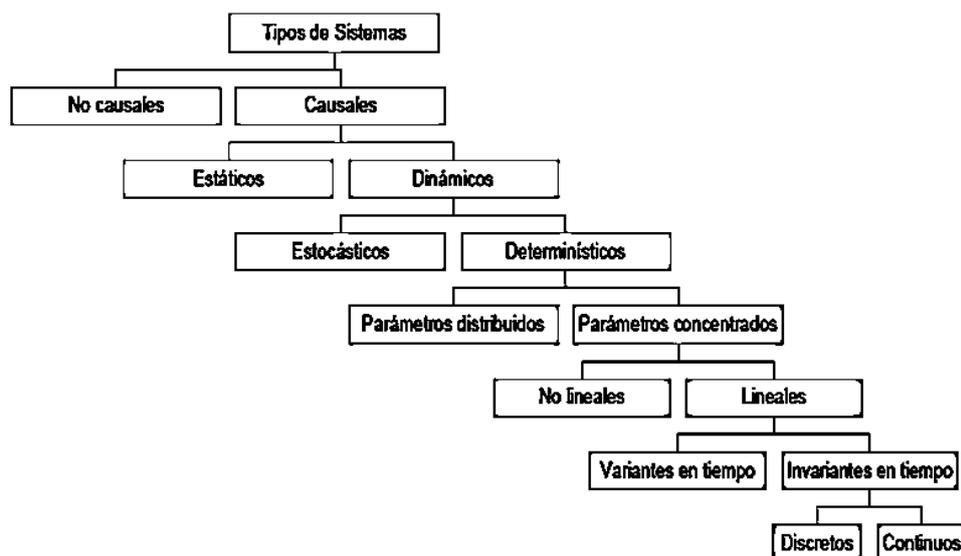


Figura 1. 2. Clasificación de modelos matemáticos

Describiendo la clasificación de los modelos observados en la figura 1.2:

Sistemas no causales y causales:

Este tipo de sistemas parten del principio de causalidad, es decir que se tiene que producir la causa, refiriéndose a la entrada del sistema, para que se genere un efecto, es decir una respuesta. A menudo se dice a los modelos no causales sistemas no realizables físicamente, ya que su variable independiente es el tiempo porque un efecto no se puede producir antes que la causa.

Sistemas estáticos y dinámicos:

Los sistemas estáticos son aquellos que al variar la entrada, instantáneamente varía la salida, por el contrario, en los sistemas dinámicos, la variación de su salida, se da ante la variación de la entrada, conforme transcurre cierto tiempo. Los sistemas dinámicos también se conocen como sistemas con memoria. Los modelos de sistemas dinámicos son ecuaciones diferenciales o de diferencia [1].

Sistemas estocásticos y determinísticos.

Los modelos determinísticos son aquellos cuyas variables que afectan al sistema son expuestas de forma precisa y específica.

Los sistemas estocásticos contienen variables aleatorias, es decir no se conocen con exactitud, en general siguen alguna distribución probabilística.

Sistemas de parámetros distribuidos y parámetros concentrados

En los modelos de parámetros concentrados, se omiten las variaciones espaciales, y sus variables dependientes se pueden considerar homogéneas en el sistema. Los modelos de parámetros distribuidos son aquellos donde hay variaciones en el comportamiento del mismo, en la vida real todos los sistemas son distribuidos, sin embargo los cambios que puede haber en éstos, son relativamente insignificante, pudiendo ser ignorados, y así considerar el sistema combinado.

En general, los procedimientos para la solución matemática de los modelos parámetros combinados son más simples que para los de parámetros distribuidos, es por ello que a menudo se aproximan estos últimos al modelo combinado equivalente [2].

Los modelos de parámetros distribuidos implican ecuaciones diferenciales con derivadas parciales; mientras que los modelos de parámetros concentrados, requieren ecuaciones con derivadas o ecuaciones de diferencia ordinarias [3].

Sistemas no lineales y lineales

Una función es lineal, si se puede expresar de la forma: $y = f(x)$ además, cumple dos propiedades, que son: la proporcionalidad y superposición.

Superposición: $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$. En términos prácticos, significa que se puede obtener la salida mediante la suma por separado de las n cantidades de entradas.

Proporcionalidad: $f(cx_1) = cf(x_1)$. En términos prácticos, quiere decir que si se incrementa la entrada el doble, triple entre otros, la salida también aumentaría en las mismas medidas.

Sistemas variantes en tiempo e invariantes en tiempo

La variabilidad, depende de que las propiedades del sistema, sean o no constantes en el tiempo, la variación se refiere a las propiedades (parámetros) del sistema, no de las señales que lo afectan (variables).

Sistemas continuos y discretos.

Si las señales que actúan en el sistema están definidas en todo instante de tiempo se lo determina señales de tiempo continuo y se establecerá el sistema como continuo. En cambio Si las señales toman valores solo en ciertos instantes de tiempo serán señales de tiempo discreto y el sistema será discreto. Con respecto a estos enunciados se deduce que la variable independiente es siempre el tiempo lo que es verdad en la mayoría de los sistemas físicos en ingeniería aunque hay excepciones donde la variable independiente es el orden de los distintos datos [4].

1.2. Señales

La señal es la vía por la cual el sistema interactúa con el entorno, se representa matemáticamente mediante una función de una diversidad de parámetros, uno de los cuales es comúnmente el tiempo.

Las señales pueden interpretar un sin número de fenómenos físicos, éstas se pueden representar de muchas maneras, sin embargo, la información en una señal está contenida en un patrón que varía en alguna manera.

En un sistema encontraremos señales de entrada y de salida, las primeras son señales que pueden ser modificadas desde el exterior,

son estímulos del entorno que influyen en el comportamiento del sistema, más no dependen de ninguno de los elementos del mismo. Las señales de entrada nos permiten actuar sobre el sistema para que este se comporte de la forma deseada es decir que una de sus características es la de ser fácilmente manipulables.

Las señales de salida son respuestas del sistema hacia su entorno, mide el comportamiento del mismo, lo principal es seleccionar correctamente las señales de salida que proveen la información representativa del comportamiento del sistema; dichas señales deben ser medibles caso contrario no contribuirían ninguna información.

Existen señales de entrada, que no pueden ser alteradas libremente y cuyos valores no pueden ser fijados por el usuario, estas señales se denominan perturbaciones y muchas veces representan el efecto que causan elementos fuera del entorno del sistema.

1.2.1. Clasificación de las señales:

Tiempo Discreto o Continuo.

Señales en tiempo continuo o señales analógicas y señales en tiempo discreto o digitales. Una señal $x(t)$ es una señal en tiempo continuo, si la variable independiente t es una variable continua y, por ende, estas señales están definidas para un continuo de valores de esa variable; es decir, el valor de $x(t)$ es especificado en todo instante t de un intervalo de tiempo dado, ya sea mediante una expresión matemática o gráficamente por medio de una curva; en otras palabras, la variable independiente puede tomar cualquier valor real [5].

Si la variable independiente t es una variable discreta, es decir, sólo pueden tomar conjuntos restringidos de valores, $x(t)$ está definida en puntos del tiempo discretos, entonces $x(t)$ es una señal en tiempo discreto, a menudo generada por muestreo de una señal de tiempo continuo. Como una señal de tiempo discreto está definida solamente en tiempos discretos, con frecuencia se identifica como una secuencia de números, denotada por $\{x_n\}$ o $x[n]$, donde, para nuestros propósitos, n es un entero [5].

Señales elementales:**Impulso o Delta**

Tiene las siguientes características:

$$\delta(t) = 0, \quad t \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) = 1$$

Al ser difícil que una función logre estas características, se las aproxima cuando el parámetro tiende a cero.

Impulso unitario:

Tiempo continuo

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & t \neq 0 \\ \infty & t = 0 \end{cases}$$

Tiempo discreto

$$\delta[n] = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \\ 1 & n = 0 \end{cases}$$

Escalón Unitario

De tiempo continuo

$$\mu(t) = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

De tiempo discreto

$$\mu[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

Rampa

De tiempo continuo

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$r(t) = t\mu(t)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^t \mu(\tau) d\tau \qquad \frac{dr(t)}{dt} = \mu(t)$$

1.3. Modelos.

Un modelo constituye una representación abstracta o simplificada de un sistema, que ayuda a comprender, predecir y controlar el comportamiento de dicho sistema.

1.3.1. Clasificación de los modelos.

- Dinámicos y estáticos.
- Matemáticos y físicos.
- Analíticos y numéricos.
- Continuos y discretos.
- Determinísticos y estocásticos.

1.4. Estado.

Es un conjunto de variables necesarias que detalla el sistema en un instante determinado.

Tipos de variables.

Los parámetros son las variables independientes del sistema, es decir, los valores conocidos que relacionan las variables, con la ayuda de la figura 1.3, entenderemos mejor la clasificación y definición de éstas.

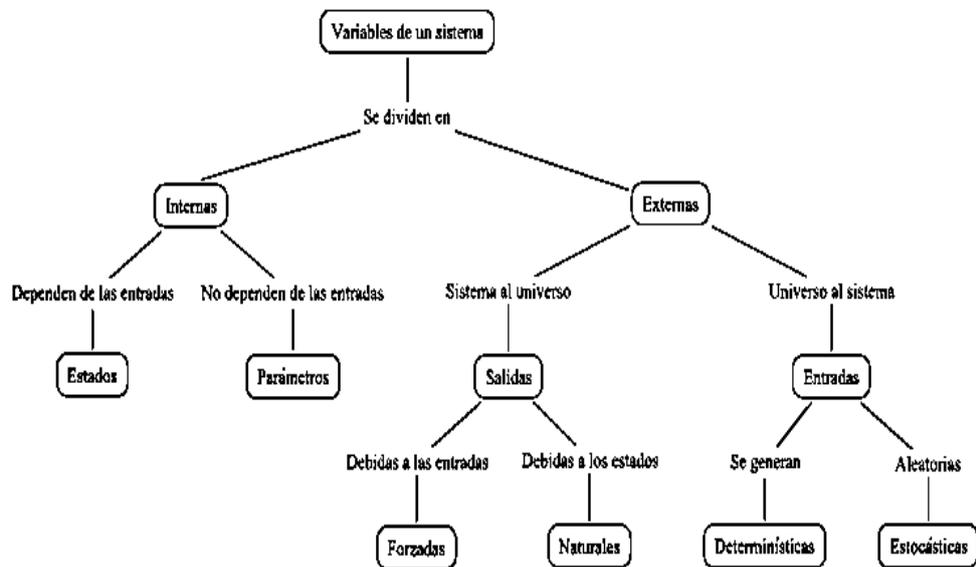


Figura 1. 3 Tipos de variables de un sistema.

CAPÍTULO 2.

2. Modelos matemáticos de los sistemas.

Estudiar el comportamiento y características de un sistema en particular del mundo real, mediante funciones o ecuaciones matemáticas se conoce como modelado matemático; es la construcción matemática de un problema donde se especifica las variables que intervienen en él, las variables son las incógnitas que se desea determinar al resolver el problema.

2.1. Qué es un modelo matemático?

Construimos modelos matemáticos para describir el cambio en un comportamiento observado, a menudo estamos interesados en entender por qué y cómo se produce dicho cambio, se puede experimentar matemáticamente con diferentes condiciones que lo

afecten, y así analizar los efectos para poder predecir lo que sucederá en el futuro y tomar mejores decisiones.

En la figura 2.1, se presenta un esquema que ayuda a realizar el proceso de modelación matemática.

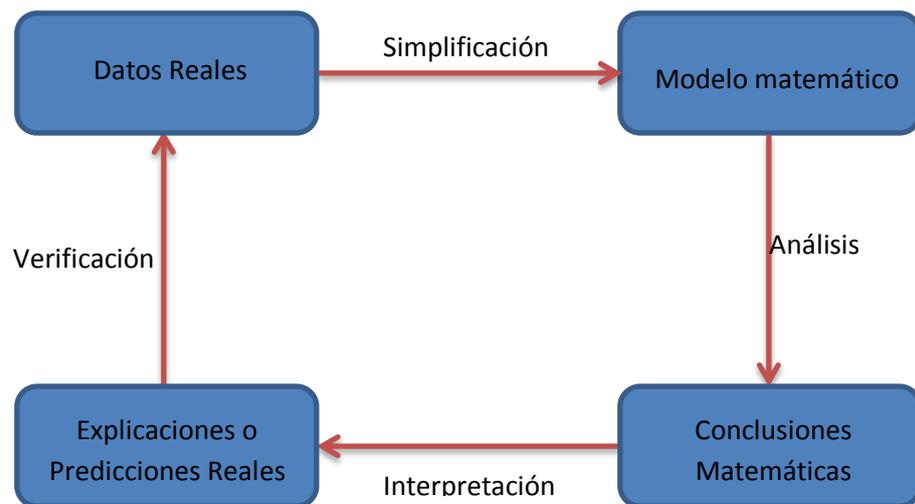


Figura 2. 1 Ciclo de modelación matemática.

Se refleja, el gran uso del modelado matemático a través de sus aplicaciones en la realidad. En cuanto a la ingeniería, es de gran aporte, para llegar a la simulación de sistemas y así predecir el comportamiento de éste, muchas veces consiguiendo ahorro de tiempo y de recursos, evitando así pérdidas. También se puede experimentar con el sistema, procesando señales y observar mejoras para un desempeño deseado.

Para el análisis del modelo matemático necesitamos saber qué tipo de modelo es y que variables actúan sobre él.

Se utilizan tres alternativas para analizar el tipo de modelo. Estas formas se pueden representar como cajas: caja blanca, gris y negra.

2.1.1. Ecuaciones diferenciales (input-output) White box

El principio de este tipo de modelos está basado en las leyes de la física, que se supone deben regir el comportamiento del sistema, para ello el usuario tiene conocimiento total del sistema, es decir cuenta con toda la información de éste.

En estos modelos la estructura refleja toda la percepción física sobre el proceso, y todas las variables y los parámetros tienen interpretaciones físicas directas.

Las leyes físicas, son las que se debe seguir estrictamente para lograr establecer las ecuaciones diferenciales que describan el comportamiento del sistema.

Existen ventajas y desventajas, cuando se realiza el modelo matemático a través de las ecuaciones diferenciales (input-output).

Ventajas:

- Los parámetros tienen razón física.
- Este tipo de modelo es muy útil en la fase de diseño, ya que no se cuenta con datos experimentales, es decir el valor de los parámetros se pueden hallar de forma aproximada.

Desventajas:

- Alto costo en tiempo de modelado ya que es necesario conocer completamente el proceso.
- En muchas ocasiones el conocimiento disponible del proceso a priori es insuficiente, lo cual limita la bondad máxima del modelo.
- La estimación de los coeficientes del modelo que se dispone de datos experimentales puede ser muy compleja dependiendo de la estructura del modelo, esta característica toma una mayor relevancia en procesos variantes con el tiempo donde es necesario realizar una estimación adaptativa on-line de los coeficientes del modelo.
- La utilización de modelos complejos no generalizables dificulta el diseño metodológico de controladores [6].

2.1.2. Identificación de sistemas. (Black box).

En estos modelos, las leyes físicas son difíciles o incluso imposible de obtener, por ende es necesario extraer un modelo a partir de datos experimentales, que mejor aproxime el comportamiento dinámico del proceso del sistema a estudiar.

Si el objetivo es simplemente representar algunas tendencias en el comportamiento del proceso, entonces el enfoque de modelado caja negra es eficaz.

Del mismo modo que en los modelos input-output, existen ventajas e inconvenientes en el modelo Black Box:

Ventajas:

- Tiempo de diseño mucho menor.
- Se pueden obtener modelos de estructura genérica, como los modelos lineales, para los que existen metodologías de diseño de controladores ampliamente desarrolladas [6].

Inconvenientes:

- Las estructuras y parámetros, no poseen razón física y no están relacionadas a las variables físicas del sistema.
- Otra desventaja es la elección de una estructura correcta para el modelo; sin embargo, se tendrá la suficiente información sobre el comportamiento del sistema, a partir de los datos experimentales.
- Es imprescindible disponer de datos experimentales representativos del comportamiento del proceso para poder realizar la identificación [6].

2.1.3. Redes neuronales (Grey Box).

También conocido como modelo híbrido, ya que combina las características de la caja blanca y enfoques de la caja negra, este modelo es más realista ya que se debe tener algo de información acerca del comportamiento dinámico del sistema, es decir, se conocen algunas leyes físicas, pero sin embargo, la estructura del modelo y algunos parámetros se deben determinar a partir de datos observados.

Por otra parte, el modelo gris, aunque es menos interpretable que los modelos de conocimiento, precisa de un menor

consumo de tiempo para su construcción para un mismo nivel de complejidad.

2.2. Modelos input-output.

Existen dos tipos de variables que influyen en el sistema, la primera se origina fuera y no es dependiente del modelo de estudio, son llamadas variables de entrada (input). El segundo grupo son variables que entrega el sistema, son llamadas variables de salida (output).

Las entradas y salidas del sistema, pueden ser representadas dentro de una ecuación diferencial de orden n y m , como se muestra en la ecuación 2.1.

$$f\left(y, \frac{dy}{dt}, \dots, \frac{d^n y}{dt^n}, u, \frac{du}{dt}, \dots, \frac{d^m u}{dt^m}, t\right) = 0 \quad (2.1)$$

Para poder tener un sistema real y realizable, se debe tener en cuenta que $m \leq n$, ya que si $m > n$ se estaría dando información de resultados futuros de un sistema, siendo algo no creíble o no realizable. La función f dependerá solamente de sus argumentos, si estos son no lineales pues será una función no lineal. Si es estacionario, es evidente que el tiempo t no formara parte de la función f , de la ecuación diferencial.

$$\begin{aligned}
 a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \\
 = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u,
 \end{aligned}
 \tag{2. 2}$$

La ecuación 2.2, es la representación de una función lineal y estacionario, los términos de a_0, a_1, \dots, a_n y b_0, b_1, \dots, b_m son constantes del sistema.

Podremos identificar sistemas input-output, por el grado y orden de su ecuación diferencial, o por medio de las señales que ingresan y las salidas que se obtiene.

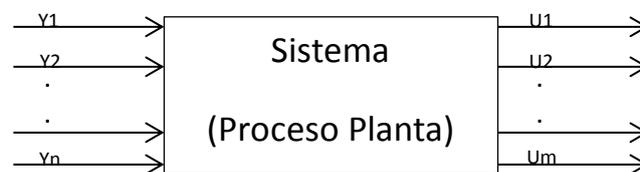


Figura 2. 2 Modelo general input-output.

En la figura 2.2, se puede observar, que el sistema tiene n entrada y sus salidas son de orden m , por el número de entradas y de salidas al sistema input-output se lo puede clasificar como:

1. - SISO. (Single Input\ Single Output).

Al sistema se lo llama SISO por tener una sola entrada y una sola salida, como se muestra en la figura 2.3.

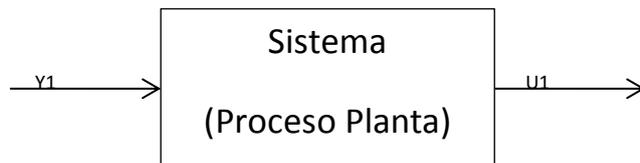


Figura 2. 3 Modelo SISO.

2. - MISO. (Multiple Input\ Single Output).

Al sistema se lo llama MISO por tener múltiples entradas y una sola salida, como se muestra en la figura 2.4.

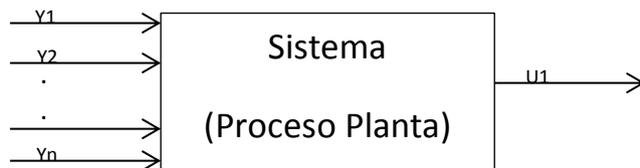


Figura 2. 4 Modelo MISO.

3. - SIMO. (Single Input\ Multiple Output).

Al sistema se lo llama SIMO por tener una sola entrada y múltiples salidas, como se muestra en la figura 2.5.

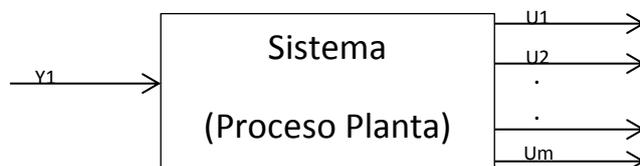


Figura 2. 5 Modelo SIMO.

4.- MIMO. (Multiple Input\ Multiple Output).

Al sistema se lo llama MIMO por tener múltiples entradas y múltiples salidas, como se muestra en la figura 2.6.

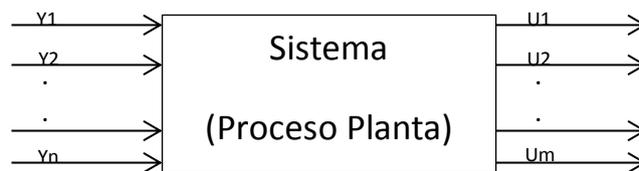


Figura 2. 6 Modelo MIMO.

Otra clasificación de los sistemas se da por la dependencia de la variable del tiempo, entonces los podemos encerrar en dos grupos:

1.-Sistemas dinámicos.

La salida que presenta un sistema, es el resultado o producto de una entrada; y es afectado por el tiempo que le toma a la entrada a llegar a su punto de equilibrio, cuando este no está.

2.-Sistemas estáticos.

La salida del sistema se ve afectada, solo si la entrada cambia y permanece constante, solo depende de la fuente más no del tiempo.

2.2.1. Sistemas de 1^{er} orden.

Las ecuaciones que resultan en el modelamiento matemático, se clasifican por un orden y grado.

Una vez obtenido el polinomio, tendrá la siguiente forma, como se muestra en la ecuación 2.3:

$$a_n \left(\frac{d^n y}{dt^n} \right)^m + a_{n-1} \left(\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right)^w + \dots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = f(t) \quad (2.3)$$

Para identificar a que orden y grado pertenecen, nos guiaremos mediante las potencias de las derivadas $(m, w, \dots, 1)$, que son aquellas que indican el grado del sistema, siendo de elección la mayor derivada (n) , la cual indica el orden del sistema.

Para formar una ecuación de primer orden n debe ser igual a uno, siendo el grado de menor importancia.

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = kf(t) \quad (2.4)$$

Siendo τ una constante de tiempo y k ganancia en estado estacionario del sistema. Estos dos parámetros; se estiman mediante ecuaciones de características físicas del sistema. La constante de tiempo expresa una constante de atraso dinámico y la ganancia es el cambio último en la variable de salida, con respecto al cambio último de la variable de entrada [7].

La solución de esta ecuación puede consistir en una relación funcional libre de derivadas, entre la variable dependiente y y la variable independiente t .

Mediante la transformada de Laplace se logra expresar a la salida como el producto de una función de transferencia y una entrada, ecuación (2.5), donde se necesita estimar la ganancia k y la constante τ .

$$\tau y(s)s + y(s) = kf(s)$$

$$(s\tau + 1)y(s) = kf(s)$$

$$y(s) = \left[\frac{k}{(s\tau + 1)} \right] f(s) \quad (2.5)$$

La cantidad por la que el sistema multiplica la entrada para generar la salida, es el término entre corchetes, que es la función de transferencia del sistema.

Para mayor generalidad se excita al sistema, con las siguientes entradas:

2.2.1.1. Respuesta ante la entrada escalón.

Un sistema de primer orden al ser estimulado por una entrada escalón unitario, cambiará a partir de la convolución entre la entrada y el sistema, aplicando la transformada de Laplace y efectuando la descomposición

en fracciones simples, la respuesta transformada será como se muestra en la ecuación 2.6.

$$y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{k}{(s\tau + 1)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (2.6)$$

Se tiene que los residuos resultan ser:

$$Y(s) = \frac{k}{\tau} \cdot \frac{1}{s \left(s + \frac{1}{\tau} \right)}$$

$$k_1 = \frac{Y(s) \cdot s}{s=0} = k$$

$$k_2 = \frac{Y(s) \cdot \left(s + \frac{1}{\tau} \right)}{s = -\frac{1}{\tau}} = -k$$

Y aplicando a $Y(s)$, la correspondiente transformada de Laplace se obtendrá la ecuación 2.7.

$$Y(s) = \frac{k}{s} + \frac{-k}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$Y(t) = k \cdot \left(1 - e^{-t/\tau} \right) \quad (2.7)$$

Utilizando el teorema el Teorema del Valor Final¹ sobre la transformada de Laplace de la salida.

¹ Permite usar la transformada de Laplace de una función para determinar el valor final de estado estacionario de esa función.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot F(s)]$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [Y(t)] = k \quad \lim_{s \rightarrow 0} [s \cdot Y(s)] = k$$

Siendo así que si el módulo de la ganancia $|k|$ es mayor a uno el sistema amplifica, caso contrario atenúa. Es decir la amplitud de la salida es más pequeña que la entrada.

Utilizando el Teorema de Valor Inicial², obtendremos el valor de inicio.

$$\lim_{t \rightarrow 0} [f(t)] = \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot F(s)]$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} [Y(t)] = 0 \quad \lim_{s \rightarrow \infty} [s \cdot Y(s)] = 0$$

La constante τ del sistema define la rapidez del modelo, en efecto:

$$t = \tau \quad Y(t = \tau) = k(1 - e^{-1}) = 0.632k$$

Se define el tiempo t_s como el que necesita el sistema para alcanzar el régimen permanente, sin embargo no es exactamente el valor final de la señal. Si el usuario tuviese la condición, de conseguir el valor de nivel de k el

² Permite usar la transformada de Laplace de una función para determinar el valor inicial de esa función.

tiempo sería infinito. Y no existiría comparación entre estos sistemas acerca de su velocidad de respuesta. Por dicha razón se suele emplear el error del 5% o 2% sobre el valor final, en este caso el 5% del valor final toma una constante de tres veces la constante de tiempo.

$$t = 3\tau \quad Y(t = 3\tau) = k(1 - e^{-3}) = 0.95k$$

En resumen la ganancia k será el valor final de la señal de salida, y la constante de tiempo τ está dada por el tiempo en que alcanza 0.632 veces el valor de k y el tiempo de establecimiento t_s coincidirá con el valor de 3τ o $0.95k$.

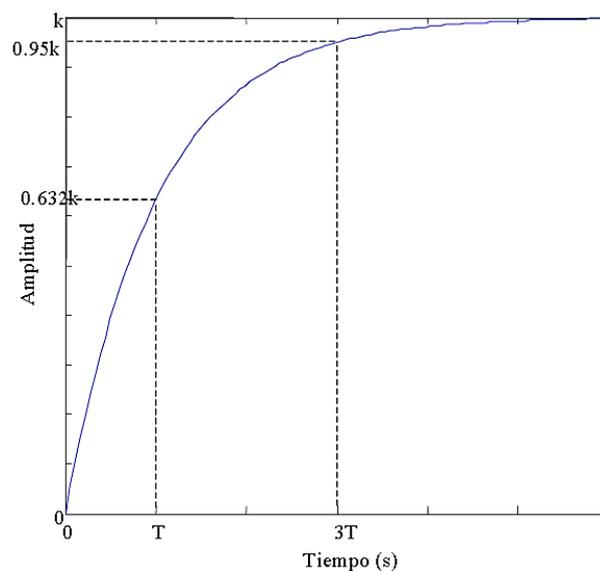


Figura 2. 7 Respuesta al escalón unitario primer orden.

2.2.1.2. Respuesta ante la entrada impulso.

La función impulso cuenta con su propia ponderación, ecuación (2.8), se define una entrada impulso aquella que en un tiempo infinitesimal ε , da un pulso de energía que tiende a ser infinito, $1/\varepsilon$.

$$\delta(t) = \begin{cases} 1/\varepsilon & 0 \leq t < \varepsilon \\ 0 & t < 0 \text{ o } t > \varepsilon \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\varepsilon \rightarrow 0$$

Para demostrar la identificación de sistemas se determina la transformada de Laplace de ésta función y luego se aplica el teorema de la convolución continua. Siendo su transformada de Laplace, observada en la ecuación 2.9.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[\delta(t)] &= \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} e^{-st} dt = \frac{1}{\varepsilon} \left[\frac{e^{-st}}{-s} \right]_0^{\varepsilon} \\ &= \frac{1}{\varepsilon s} [1 - e^{-s\varepsilon}]^H = \frac{s e^{-s\varepsilon}}{s} = 1 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Al ser su transformada la unidad, la respuesta impulsional concuerda con la misma esencia del sistema, $y(t) = g(t)$, por el teorema de convolución se tiene la ecuación 2.10:

$$Y(s) = G(s) = \frac{k}{(s\tau + 1)}$$

$$Y(s) = \frac{k/\tau}{s + \frac{1}{\tau}}$$

$$y(t) = \frac{k}{\tau} e^{-t/\tau} = g(t) \quad (2.10)$$

Aplicando:

-Teorema de valor final.

$$y(t \rightarrow \infty) = 0 \quad \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot 1 \cdot \frac{k}{1 + s\tau} = 0$$

-Teorema de valor inicial.

$$y(t \rightarrow 0) = \frac{k}{\tau} \quad \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot 1 \cdot \frac{k}{1 + s\tau} = \frac{k}{\tau}$$

Los valores típicos de la salida cuando el tiempo corresponda a τ y 3τ respectivamente se calcularán de la siguiente forma, como se muestra en la ecuación 2.11 y 2.12.

$$t = \tau \quad Y(t = \tau) = \frac{k}{\tau} e^{-1} = 0.367 \frac{k}{\tau} \quad (2.11)$$

$$t = 3\tau \quad Y(t = 3\tau) = \frac{k}{\tau} e^{-3} = 0.05 \frac{k}{\tau} \quad (2.12)$$

Representando la respuesta dinámica a la señal impulso en la siguiente gráfica.

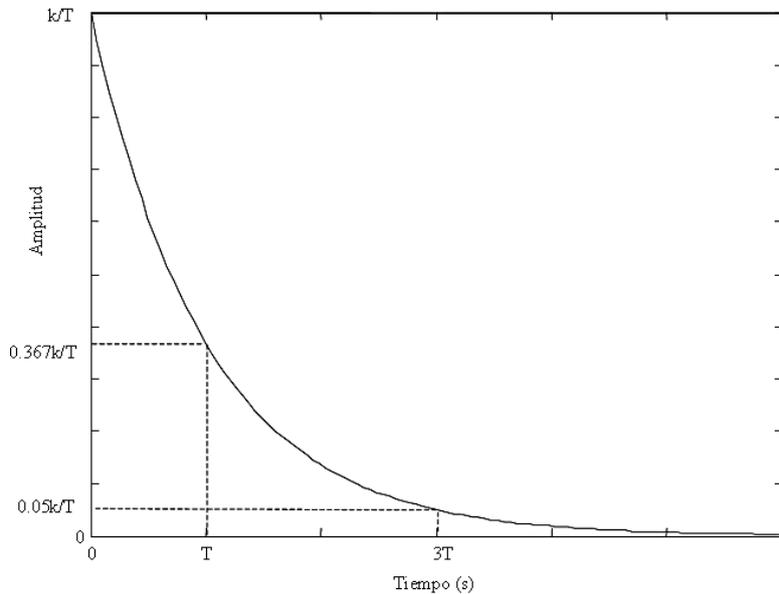


Figura 2. 8 Respuesta al impulso Primer orden.

2.2.1.3. Respuesta ante la entrada rampa.

A través de la transformada de Laplace, en la ecuación 2.13, se puede determinar la respuesta dinámica ante el estímulo de la rampa unitaria, ecuación 2.14, en un sistema de primer orden.

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} \frac{k}{(s\tau + 1)} = \frac{a_2}{s^2} + \frac{a_1}{s} + \frac{k_1}{s + \frac{1}{\tau}} \quad (2.13)$$

$$a_2 = [s^2 Y(s)]_{s=0} = k$$

$$a_1 = \left[\frac{d}{ds} \left(s^2 \frac{k}{s^2 (s\tau + 1)} \right) \right]_{s=0} = \left[\frac{k(-\tau)}{(s\tau + 1)^2} \right]_{s=0} = -k\tau$$

2.2.2. Sistemas de 2^{do} orden.

La expresión matemática que generaliza a estos sistemas, está definida por la ecuación 2.15.

$$a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_0 y = bf(t) \quad (2.15)$$

Existen, sistemas con dinámicas de segundo orden puras o formadas por la combinación de dos sistemas de primer orden en serie, es decir el producto de dos funciones de transferencia en primer orden.

Considerando condiciones iniciales iguales a cero, la función de transferencia será:

$$(a_2 s^2 + a_1 s + a_0)Y(s) = bF(s)$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$$

$$G(s) = \frac{b}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2} \quad (2.16)$$

En referencia a la ecuación 2.16, la dinámica de este caso, está definida por las raíces del denominador, que determinan el comportamiento en régimen transitorio. La característica de los polos; puede ser de tipo real o de compleja conjugada, por ejemplo.

$$G(s) = \frac{b}{(s + p_1)(s + p_2)}$$

El método del lugar de las raíces, ayuda a trazar los polos o raíces del sistema (Bucle cerrado) o permite predecir los efectos de la variación en la ganancia k o la adición de nuevos polos o ceros (Bucle abierto).

$G(s)H(s)$	Ubicación de polos y ceros de lazo abierto y lugar de las raíces	$G(s)H(s)$	Ubicación de polos y ceros de lazo abierto y lugar de las raíces
$\frac{K}{s}$		$\frac{K}{s^2}$	
$\frac{K}{s+p}$		$\frac{K}{s^2 + \omega_1^2}$	
$\frac{K(s+z)}{s+p}$ ($z > p$)		$\frac{K}{(s+\sigma)^2 + \omega_1^2}$	
$\frac{K(s+z)}{s+p}$ ($z < p$)		$\frac{K}{(s+p_1)(s+p_2)}$	

Figura 2. 10 Lugar geométrico de las raíces.

Análogamente si en los sistemas de primer orden los parámetros eran la ganancia k y la constante de tiempo τ , en los sistemas de segundo orden los parámetros serán: k la ganancia, ξ el factor de amortiguamiento, w_n la frecuencia natural no amortiguada y $\sigma = 2\xi w_n$ donde el símbolo σ se denomina atenuación.

$$G(s) = \frac{k}{\left(\frac{s}{w_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{w_n}\right) + 1} = \frac{k w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} \quad (2.17)$$

En la ecuación 2.17, apreciamos que w_n es la velocidad angular constante y está dada en rad/seg, su significado en el dominio complejo, es la distancia euclídea, entre el origen de coordenadas y los polos. ξ es adimensional, si es mayor a 1 o 1 en valor absoluto, las raíces son reales, caso contrario, son complejas y conjugadas.

Hallando las raíces del denominador:

$$s^1, s^2 = \frac{-2\xi w_n \pm \sqrt{(2\xi w_n)^2 - 4w_n^2}}{2} = -\xi w_n \pm j w_n \sqrt{1 - \xi^2}$$

Si $\xi < 1$ las raíces serán complejas, teniendo así una componente real y otra imaginaria conjugada; la primera se

llamará constante de amortiguamiento σ cuya ubicación se dará en el eje real.

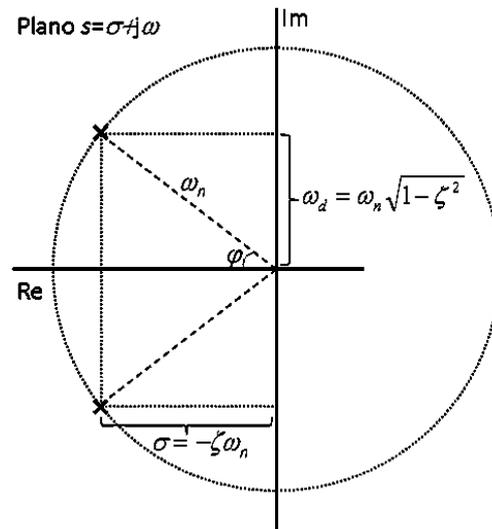


Figura 2. 11 Parámetros que caracterizan la respuesta.

La segunda es la frecuencia de amortiguamiento w_d y se encontrará en el eje imaginario.

$$w_n^2 = \sigma^2 + w_d^2 \quad 0 \leq |\xi| \leq 1$$

El ángulo de apertura de los polos complejos, φ estará relacionada con el coeficiente de amortiguamiento ξ .

$$\xi = \cos \varphi \quad 0 \leq |\xi| \leq 1$$

En relación al coeficiente de amortiguamiento ξ , se pueden plantear tres casos:

- Respuesta sub-amortiguada $0 \leq |\xi| < 1$, las soluciones con complejas conjugadas.
- Respuesta críticamente amortiguada $\xi = 1$, solo hay una solución real (repetida).
- Respuesta sobre-amortiguada, $\xi > 1$, las dos soluciones son reales.

Para que un sistema sea estable los coeficientes de amortiguamiento tienen que ser mayores que cero.

2.2.2.1. Respuesta transitoria ante una entrada escalón unitario.

Caso sub-amortiguado.

Los polos serán complejos y conjugados y se encuentran en el semiplano negativo del dominio complejo:

$$G(s) = \frac{k w_n^2}{s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2} = \frac{k w_n^2}{(s + \sigma - j w_d)(s + \sigma + j w_d)}$$

Al ser estimulado por una entrada escalón unitario, se obtiene la ecuación 2.18.

$$G(s) = \frac{k w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)s} \quad (2.18)$$

Aplicando fracciones parciales, se tiene:

$$G(s) = \frac{k w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)s}$$

$$= k \left(\frac{1}{s} - \frac{s + \xi w_n}{(s + \xi w_n)^2 + w_d^2} - \frac{\xi w_n}{(s + \xi w_n)^2 + w_d^2} \right)$$

Aplicando la anti transformada:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + \xi w_n}{(s + \xi w_n)^2 + w_d^2} \right] = e^{-\xi w_n t} \cos w_d t$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{w_d}{(s + \xi w_n)^2 + w_d^2} \right] = e^{-\xi w_n t} \sin w_d t$$

Teniendo así la salida en el tiempo:

$$g(t) = k \left(1 - \frac{e^{-\xi w_n t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin \left(w_d t + \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \right)$$

$$\varphi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi}$$

Obteniendo así, la ecuación 2.19.

$$g(t) = k \left(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(w_d t + \varphi) \right) \quad (2.19)$$

Ya que este modelado, proporciona información sobre la estabilidad y la naturaleza de la respuesta del régimen transitorio, se trata de caracterizar mediante medidas de tiempo y valor pico.

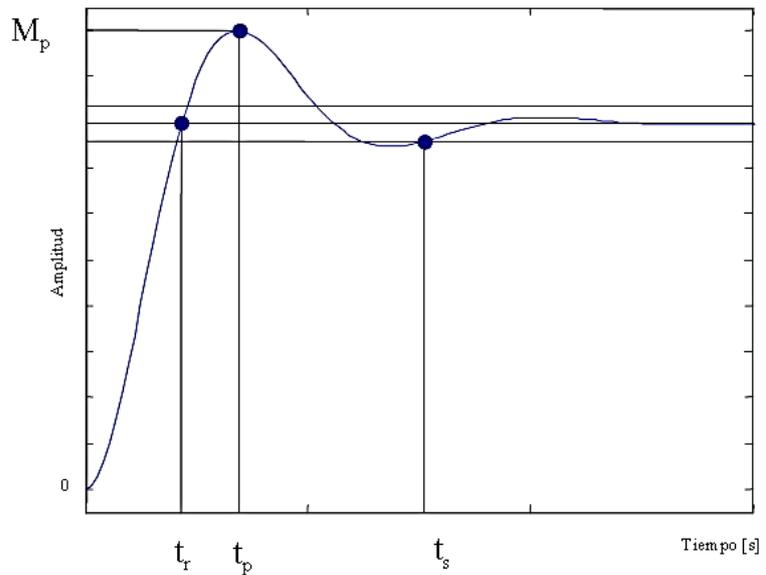


Figura 2. 12 Caso sub-amortiguado entrada escalón.

-Tiempo de establecimiento, T_s .

Es el tiempo que toma alcanzar el régimen permanente, con un error del 5% o 2% del valor final, simplificando y no considerando el efecto sinusoidal notaremos que aproximadamente el 95% de la señal se logra cuando la envolvente vale 0.05 o 0.02.

$$g(t) = k \left(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(\omega_d t + \varphi) \right)$$

$$\frac{e^{-\sigma t_s}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cong 0.05 = e^{-\pi}$$

Si ξ tomara valores entre $0 < \xi < 0.7$, t_s será inversamente proporcional a la constante de amortiguamiento, observando la proporcionalidad de t_s en la ecuación 2.20.

$$\xi \ll 1 \rightarrow t_s \cong \frac{\pi}{\sigma} \quad (2.20)$$

-Tiempo de pico, t_p .

Es el intervalo de tiempo en darse la máxima amplitud de salida; se lo obtendrá mediante la primera derivada de $g(t)$ e igualándola a 0.

$$\dot{g}(t) = 0$$

$$\dot{g}(t) = -k \left(\begin{array}{l} \frac{(-\sigma) \cdot e^{-\sigma t_p}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(w_d t_p + \varphi) \\ + \frac{e^{-\sigma t_p}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \cos(w_d t_p + \varphi) w_d \end{array} \right)$$

Reestructurando la ecuación, obtendremos:

$$\tan(w_d t_p + \varphi) = \frac{w_d}{\sigma} = \frac{w_n \sqrt{1 - \xi^2}}{\xi w_n} = \tan \varphi$$

Donde se puede visualizar; que los tiempos de máximos y mínimos, estarán validados por la coincidencia de φ con vueltas enteras de π *radianes* de $w_d t_p$.

La primera vuelta de π radianes coincidirá con la amplitud máxima de salida, el tiempo de pico t_p es inversamente proporcional a la frecuencia de amortiguamiento, como se muestra en la ecuación 2.21.

$$w_d t_p = \pi \rightarrow t_p = \frac{\pi}{w_d} \quad (2.21)$$

Habrá tiempo de pico si habrá sobre oscilación y esta existirá si el factor de amortiguamiento esta entre 0.707 y 0.

- Sobre-oscilación, M_p .

Valor de pico máximo de la salida ponderado con el valor final. Para la definición de M_p se introducirá el valor de tiempo pico t_p .

$$M_p = \frac{y_{max} - y_{rp}}{y_{rp}} = \frac{k \left(1 - \frac{e^{-\sigma\pi/w_d}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\pi + \varphi) \right) - k}{k}$$

$$= \frac{1 + \left(\frac{e^{-\sigma\pi/w_d}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\varphi) \right) - 1}{1}$$

Ya que el seno de φ y el radicando son iguales, la sobre-oscilación dependerá únicamente del ángulo de apertura de los polos, como para los sistemas sub-amortiguados ξ esta correlacionado con φ , como se muestra en la

ecuación 2.22, mediante el coseno implica que a menor ξ habrá mayor sobre-oscilación.

Si ξ esta entre 0.4 y 0.7 se considera un sistema estable y con respuesta temporal aceptable.

$$M_p = e^{-\frac{\sigma\pi}{w_d}} = e^{-\frac{\sigma\pi}{\tan\varphi}} ; \quad (2.22)$$

$$M_p[\%] = e^{-\sigma\pi/\tan\varphi} \cdot 100\%$$

-Tiempo de subida, t_r .

Es el intervalo de tiempo que tarda el sistema de pasar de 10% al 90% en una de sus señales, sin embargo para el cálculo matemático a fin de simplificar la expresión será; el tiempo transcurrido en alcanzar por primera vez el 100% del valor final de la señal de salida, como se muestra en la ecuación 2.23.

$$\frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(w_d t_r + \varphi) = 0$$

$$\sin(w_d t_r + \varphi) = 0$$

$$w_d t_r + \varphi = \pi \rightarrow t_r = \frac{\pi - \varphi}{w_d} \quad (2.23)$$

Caso críticamente-amortiguado $\xi = 1$.

En este caso; se tiene dos polos reales iguales y $Y(s)$ ante una entrada escalón.

$$Y(s) = \frac{k w_n^2}{(s + w_n)^2 s}$$

La transformada inversa y expresión final, se muestra en la ecuación 2.24.

$$y(t) = k(1 - e^{-w_n t}(1 + w_n t)) \quad t \geq 0 \quad (2.24)$$

Caso sobre-amortiguado $\xi > 1$.

En este caso se tiene dos polos reales negativos y diferentes.

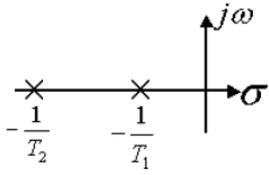
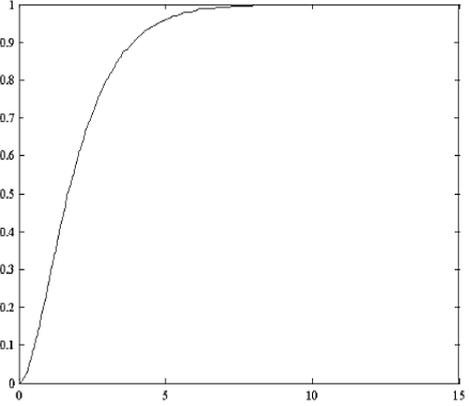
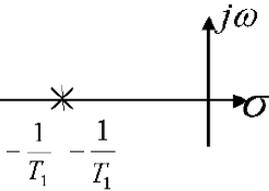
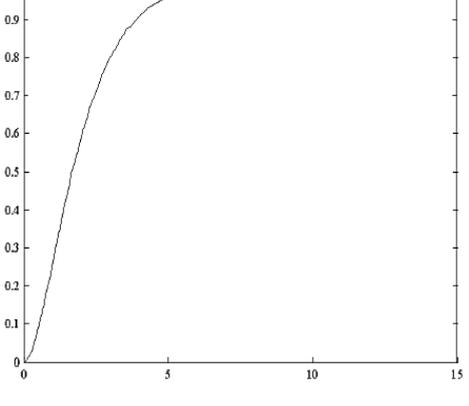
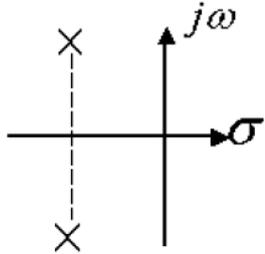
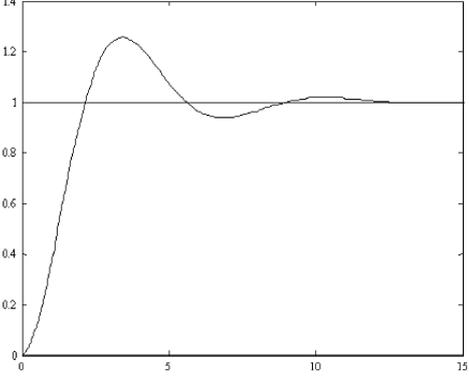
$$Y(s) = \frac{k w_n^2}{(s + \xi w_n + w_n \sqrt{\xi^2 - 1})(s + \xi w_n - w_n \sqrt{\xi^2 - 1}) s}$$

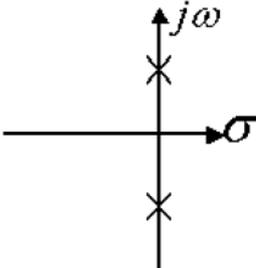
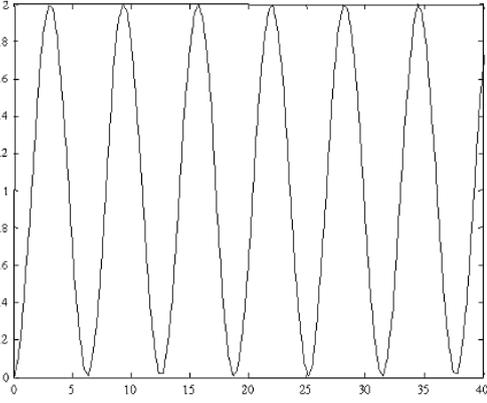
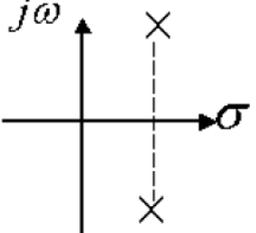
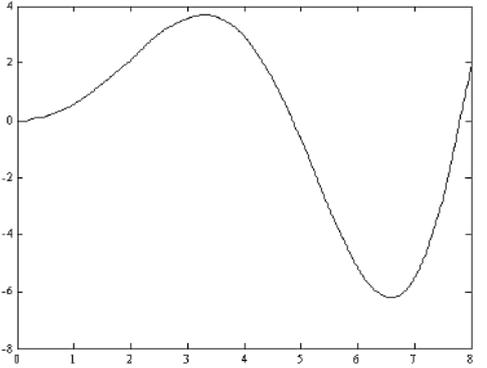
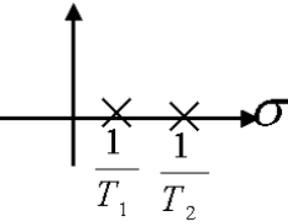
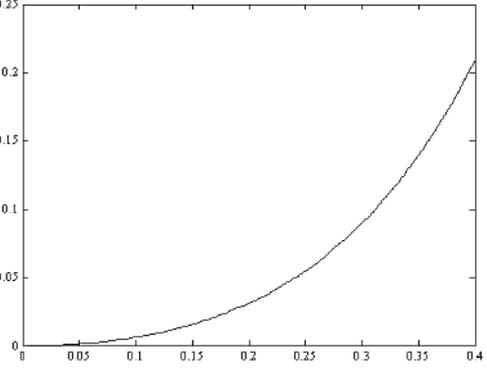
Aplicando transformada inversa se obtiene la ecuación 2.25.

$$y(t) = k \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})w_n t} - \frac{1}{2\sqrt{\xi^2 - 1}(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})w_n t} \right) \quad (2.25)$$

Cuanto mayor es ξ más amortiguada es la respuesta, el sistema requiere más tiempo para lograr el nuevo estado

estacionario. La ganancia k tiene el mismo sentido físico que para los sistemas de primer orden.

Situación del polo.	Respuesta al escalón.	Sistema.
		<p>Sobre Amortiguado $\xi > 1$</p>
		<p>Críticamente Amortiguado $\xi = 1$</p>
		<p>Sub Amortiguado $0 < \xi < 1$</p>

		<p>Críticamente estable $\xi = 0$</p>
		<p>Inestable $-1 < \xi < 0$</p>
		<p>Inestable $\xi < -1$</p>

2.2.2.2. Respuesta transitoria ante una entrada impulso.

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)}$$

Caso sub-amortiguado.

La respuesta impulso de un sistema sub-amortiguado, concuerda con la misma esencia del sistema, aplicando descomposición de fracciones simples:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{k\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)} = \frac{k\omega_n^2}{(s + \sigma - j\omega_d)(s + \sigma + j\omega_d)} \\ &= \frac{k_1}{(s + \sigma - j\omega_d)} + \frac{k_2}{(s + \sigma + j\omega_d)} \end{aligned}$$

Aplicando la transformada inversa y el cálculo de los residuos se tiene:

$$g(t) = k_1 e^{-(\sigma - j\omega_d)t} + k_2 e^{-(\sigma + j\omega_d)t}$$

$$k_1 = [(s + \sigma - j\omega_d)G(s)]_{s=-\sigma + j\omega_d} = \frac{k\omega_n^2}{2j\omega_d} = \frac{k\omega_n}{2j\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$k_2 = [(s + \sigma + j\omega_d)G(s)]_{s=-\sigma - j\omega_d} = \frac{k\omega_n^2}{-2j\omega_d} = \frac{-k\omega_n}{2j\sqrt{1 - \xi^2}}$$

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\sigma t} \left(\frac{e^{j\omega_d t} - e^{-j\omega_d t}}{2j} \right) \\
 &= \frac{k\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\sigma t} \sin(\omega_d t) \quad (2.26)
 \end{aligned}$$

Como se puede apreciar en la ecuación 2.26, la respuesta es una combinación de una exponencial decreciente con el tiempo y un armónico de frecuencia ω_d , la excitación depende de una constante de amortiguamiento σ , realizando un análisis detallado a esto se tiene que a medida que σ se haga mayor; el sistema se hace más estable y más rápido.

Ya que al estar sus polos complejos sobre rectas paralelas tendrá igual constante de amortiguamiento y al alejarse del semiplano positivo indica mayor estabilidad y a medida que aumente la constante de amortiguamiento, σ más rápido cesara la salida, por motivos del exponencial con el término.

En el análisis con el que respecta a ω_d , mientras este aumente menor será el periodo del armónico y para un mismo valor de σ , el número de oscilaciones, antes de apagarse la salida, será mayor.

Caso críticamente-amortiguado.

Cuando $\xi = 1$, se tiene la ecuación 2.27.

$$g(t) = w_n^2 t e^{-w_n t} \quad (2. 27)$$

Caso sobre-amortiguado.

Cuando $\xi > 1$, se tiene la ecuación 2.28.

$$g(t) = \frac{k w_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-(\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\xi w_n t} - \frac{k w_n}{2\sqrt{\xi^2 - 1}} e^{-(\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\xi w_n t} \quad (2. 28)$$

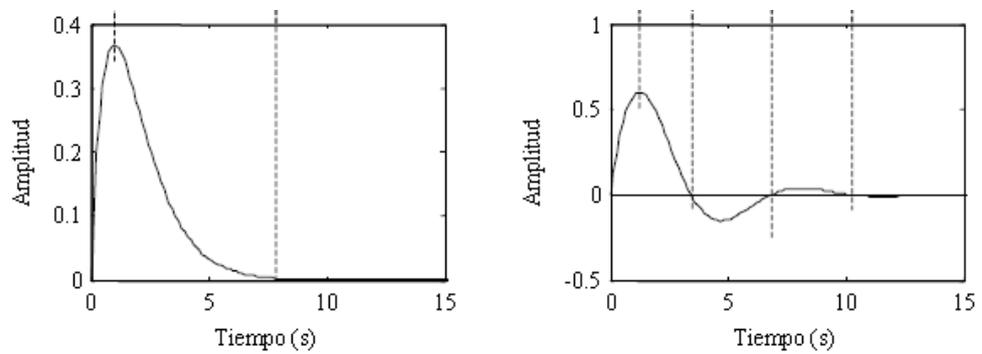


Figura 2. 13 Respuesta a la entrada impulso segundo orden sobre-amortiguado y sub-amortiguado.

2.2.2.3. Respuesta transitoria ante una entrada rampa.

-Caso sub-amortiguado.

$$Y(s) = \frac{k\omega_n^2}{(s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2)s^2}$$

$$y(t) = k \left[\left(t - \frac{2\xi}{\omega_n} \right) + \frac{2\xi}{\omega_n} \frac{\sin(\omega_d t + \varphi)}{\sin \varphi} e^{-\sigma t} \right]$$

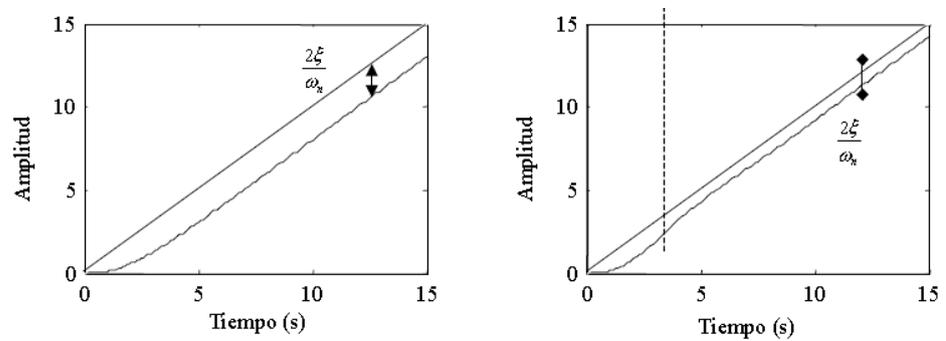


Figura 2. 14 Respuesta a la rampa sobre-amortiguado y sub-amortiguado.

2.2.3. Sistemas de orden superior.

Sistemas de orden superior contienen zeros y polos adicionales, que afectan el comportamiento tanto en régimen transitorio como permanente.

Sistemas de segundo orden con polo adicional.

La ecuación que generaliza este tipo de sistema, se muestra en la ecuación 2.29.

$$H(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)(1 + bs)} \quad (2.29)$$

La respuesta transitoria, viene dada por la expresión de la ecuación 2.30.

$$h(t) = 1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sin^2 \varphi} [\sin(w_d t + \varphi + \varphi_p) \sin(\varphi + \varphi_p) + e^{-\sigma t} \sin^2 \varphi_p] \quad (2.30)$$

Visualizando, en la ecuación 2.31, se ve que se asemeja con la de un sistema de segundo orden.

$$g(t) = k \left(1 - \frac{e^{-\sigma t}}{\sqrt{1 - \xi^2}} \sin(w_d t + \varphi) \right) \quad (2.31)$$

El cambio sobre la respuesta del sistema dependerá de la posición relativa del nuevo polo con respecto al par de polos complejos conjugados.

Respuesta transitoria de sistemas de orden superior.

La respuesta de sistema de orden superior, es la suma de las respuestas de primer orden y segundo orden. La función de transferencia se puede expresar en la ecuación 2.32.

$$H(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

$$H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{\prod_{i=1}^n (s + p_i)} \quad (2.32)$$

Separando polos en el origen, polos reales y polos complejos queda:

$$H(s) = K \frac{\prod_{j=1}^m (s + z_j)}{s^1 \prod_{h=1}^q (s - \sigma_h)^{v_h} \prod_{k=1}^{\gamma} (s - a_k + jw_k)^{\lambda_k} (s - a_k - jw_k)^{\lambda_k}}$$

Descomponiendo en fracciones simples:

$$H(s) = \sum_{u=1}^l \frac{A_u}{s^u} + \sum_{h=1}^q \sum_{u=1}^{v_h} \frac{B_{hu}}{(s - \sigma_h)^u} + \sum_{k=1}^{\gamma} \sum_{u=1}^{\lambda_k} \frac{C_{ku}}{(s - a_k + jw_k)^u} + \frac{C_{ku}^*}{(s - a_k - jw_k)^u} \quad (2.33)$$

Dentro de H(s), de la ecuación 2.33, se puede observar:

$$\sum_{u=1}^l \frac{A_u}{s^u} + \sum_{h=1}^q \sum_{u=1}^{v_h} \frac{B_{hu}}{(s - \sigma_h)^u} \quad \text{primer orden}$$

$$\sum_{k=1}^{\gamma} \sum_{u=1}^{\lambda_k} \frac{C_{ku}}{(s - a_k + jw_k)^u} + \frac{C_{ku}^*}{(s - a_k - jw_k)^u} \quad \text{segundo orden}$$

Respuesta temporal al escalón unitario.

$$Y(s) = H(s)/s$$

Descomponiendo en fracciones simples se tiene:

$$\begin{aligned}
 Y(s) = & \sum_{u=1}^l \frac{M_u}{s^u} + \sum_{h=1}^q \sum_{u=1}^{v_h} \frac{N_{hu}}{(s - \sigma_h)^u} \\
 & + \sum_{k=1}^{\gamma} \sum_{u=1}^{\lambda_k} \frac{P_{ku}}{(s - \alpha_k + jw_k)^u} + \frac{P_{ku}^*}{(s - \alpha_k - jw_k)^u} \\
 & + \sum (\text{términos debido a } U(s))
 \end{aligned}$$

Pasando al dominio temporal, se obtiene la expresión de la ecuación 2.34.

$$\begin{aligned}
 y(t) = & \sum_{u=1}^l \frac{M_u}{(u-1)!} t^{u-1} + \sum_{h=1}^q \sum_{u=1}^{v_h} \frac{N_{hu}}{(u-1)!} t^{u-1} e^{\sigma_h t} \\
 & + \sum_{k=1}^{\gamma} \sum_{u=1}^{\lambda_k} \frac{2|P_{ku}|^u}{(u-1)!} t^{u-1} e^{-\sigma_k t} \cos(w_k t - \arg(P_{ku})) \quad (2.34) \\
 & + \sum (\mathcal{L}^{-1}[\text{terminos debidos a } U(s)])
 \end{aligned}$$

2.3. Linealización.

Muchos sistemas, en la vida real son sistemas no lineales; sobre todo en áreas como la mecánica y reacciones químicas.

Un sistema es no lineal si no se aplica el principio de superposición. Por tanto para un sistema no lineal la respuesta a dos entradas, no puede calcularse tratando cada entrada una a la vez y sumando los resultados [7].

Sin embargo, si el sistema opera alrededor de un punto de equilibrio y si las señales son pequeñas, es posible aproximar el sistema no lineal mediante un sistema lineal, considerando dentro de un rango de operación limitado [7].

Para poder relacionar el comportamiento de un sistema no lineal con el comportamiento de un sistema lineal hay varias formas, una de ellas es la linealización por series de Taylor.

$$x_{\delta}(t) = u_{\delta}(t) + \left(\frac{df}{dx} \Big|_{(x,u)} x_{\delta}(t) \right) + \left(\frac{df}{du} \Big|_{(x,u)} u_{\delta}(t) \right) + \dots$$

$$y_{\delta}(t) = \frac{dh}{dx} \Big|_{(x)} x_{\delta}(t)$$

La aproximación se puede hallar basada en el teorema de expansión en serie de Taylor, donde $x_{\delta}(t)$ y $y_{\delta}(t)$ corresponden a expresiones no lineales.

Donde; $\frac{df}{dx}$ es una matriz cuadrada de n filas y n columnas, $\frac{df}{du}$ es un vector de n filas y $\frac{dh}{dx}$ es un vector. La forma más simplificada de observarla será:

$$\dot{x}_\delta = Ax_\delta(t) + Bu_\delta(t);$$

$$y_\delta(t) = Cx_\delta(t)$$

$$x_\delta(t_0) = x_{0\delta}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{df1}{dx1} & \dots & \frac{df1}{dxn} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{dfn}{dx1} & \dots & \frac{dfn}{dxn} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{df1}{du} \\ \vdots \\ \frac{dfn}{du} \end{bmatrix}$$

$$C = \left[\frac{dh}{dx1} \quad \dots \quad \frac{dh}{dxn} \right]$$

CAPÍTULO 3

3. Modelamiento matemático de un sistema de llenado de dos tanques en serie.

El modelo a analizar es un sistema hidráulico, basado en la dinámica de fluidos, en este caso se estudiará la estabilidad del llenado de tanques en serie, asumiendo que el fluido es ideal incompresible³.

Para facilitar la respectiva deducción de las ecuaciones, primero se detallará el modelo básico, que consta de un solo tanque, a partir de éste esquema se deducirá las ecuaciones del sistema de dos tanques y de tres respectivamente; su estudio está establecido sobre dos pilares importantes de la hidrodinámica, como lo son: la ecuación de Bernoulli y la ley de Torricelli.

³ Un fluido ideal es incompresible si su densidad no cambia y no tiene fricción interna.

Se debe realizar los balances de energía y materia necesarios, mediante el teorema de trabajo y energía.

3.1. Modelo matemático de un sistema de llenado de un tanque.

El sistema es un tanque, que tiene una área de base A , que será alimentado con una señal de entrada $q_0(t)$, que será manipulada a través de funciones escalón unitario, rampa e impulso, además consta en la parte inferior de una salida de caudal $q(t)$ de sección transversal A_S , la variable que depende del tiempo es h_0 .

El objetivo es modelar el sistema, para predecir la variación de la altura de acuerdo a la alimentación del caudal de entrada volumétrico $q_0(t)$, teniendo en asunción que la variable del caudal de salida $q(t)$ es una función lineal de la altura del líquido.

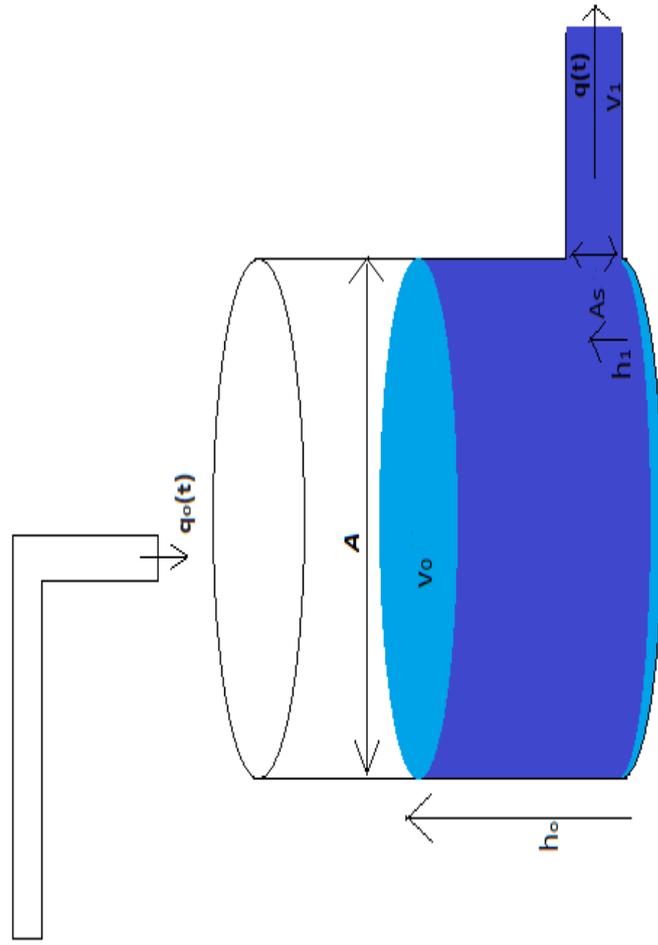


Figura 3. 1. Representación del llenado de un Tanque.

Para la obtención de las ecuaciones diferenciales resultantes del sistema, aplicaremos la conservación de la energía mecánica sobre los fluidos, donde existe un trabajo de acuerdo a la diferencia de presión entre la entrada P_0 y salida P_1 , producto de la variación de volumen que el tanque tiene.

-Teorema de conservación de la energía mecánica.

$$W = \Delta E_C + \Delta E_P$$

-Balance de trabajo debido a las fuerzas de presión

$$W = (P_0 - P_1) \Delta V$$

-Energía cinética.

$$\Delta E_C = \Delta K = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_0^2$$

-Energía potencial.

$$\Delta E_P = \Delta U = \Delta m \cdot g \cdot h_1 - \Delta m \cdot g \cdot h_0$$

-Balance de energía mecánica del sistema

$$(P_0 - P_1) \Delta V = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_0^2 + \Delta m \cdot g \cdot h_1 - \Delta m \cdot g \cdot h_0$$

Si dividimos cada término entre ΔV y recordamos que $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$,

quedando:

$$(P_0 - P_1) = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho \cdot g \cdot h_1 - \rho g h_0$$

En referencia a la Ley de Torricelli⁴: Siendo el área $A \gg A_s$ se considera que el flujo está en reposo en la parte superior, es decir $v_0 = 0$.

Esto se puede explicar mediante la ecuación de continuidad para fluidos.

$$Av_0 = A_s v_1$$

La ecuación, nos dice que la velocidad con la que fluye el líquido es alta donde el tubo es estrecho A_s (pequeña) y baja cuando el tubo es ancho A (grande).

Por otra parte; la entrada y la salida del caudal, están expuestas a la fuerza que ejerce el aire atmosférico. Por ende ambas presiones tanto P_0 y P_1 son presiones atmosféricas; en consecuencia éstas se anularán $(P_0 - P_1) = 0$, como h_1 es pequeño en comparación a h_0 ; esta es despreciada o toma el valor de cero ($h_1 = 0$) , dando como resultado:

$$\overbrace{(P_0 - P_1)}^0 = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \overbrace{v_0^2}^0 + \rho \cdot g \cdot \overbrace{h_1}^0 - \rho \cdot g \cdot h_0$$

⁴ El teorema de Torricelli es una aplicación del principio de Bernoulli y estudia el flujo de un líquido contenido en un recipiente, a través de un pequeño orificio bajo la acción de la gravedad. "Esta velocidad de salida es igual a la que tendría un cuerpo cualquiera cayendo libremente en el vacío"

$$v_t = \sqrt{2 \cdot g \cdot \left(h + \frac{v_0^2}{2 \cdot g} \right)}$$

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 = \rho g h_0$$

Despejando así la velocidad v_1 :

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$$

Como el propósito; es obtener el caudal de salida con respecto a la variación de la altura, se realizara los siguientes artificios matemáticos.

$$q = A_s v_1$$

$$q = A_s \sqrt{2 \cdot g \cdot h_0}$$

Ya que $A_s \sqrt{2 \cdot g}$ es un valor constante, para simplificar la nomenclatura se lo llamara kv .

$$kv = A_s \sqrt{2 \cdot g}$$

$$q = kv \sqrt{h_0}$$

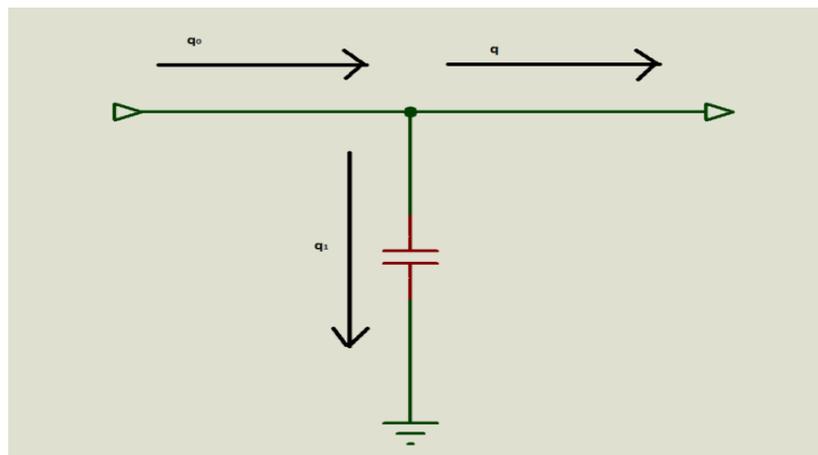


Figura 3. 2. Representación eléctrica de un tanque.

Con la ayuda de la representación eléctrica del sistema, figura 3.2, haremos uso de las leyes fundamentales de la electricidad y electrónica, como lo es la ley de Kirchhoff.

$$q_0 = q_1 + q$$

Como el caudal q_1 , es el producto del área con la velocidad, la derivada de la altura h_0 representa a la velocidad existente en el tanque.

$$q_1 = Ah_0$$

Teniendo así el sistema de ecuaciones final:

$$q_0 = Ah_0 + kv\sqrt{h_0}$$

$$Ah_0 = q_0 - kv\sqrt{h_0}$$

$$\dot{h}_0 = \frac{q_0}{A} - \frac{kv}{A}\sqrt{h_0} \quad (3.1)$$

Debido a que la ecuación 3.1, es no lineal por su segundo término del lado derecho, no es posible resolverla de manera analítica, por eso es necesario linealizarla; aplicando la técnica de expansión de series de Taylor, puesto que este término se debe linealizar con respecto a h_0 .

Partiendo por definición:

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial h_0} \right]_{(h=\bar{h}, q_i=Q)} \quad B = \left[\frac{\partial f}{\partial q} \right]_{(h=\bar{h}, q_i=Q)}$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial h} \Big|_{\substack{h=\bar{h} \\ qi=Q}} = \left[-\frac{kv}{2A\sqrt{h_0}} \right]_{\substack{h=\bar{h} \\ qi=Q}} = \left[-\frac{kv}{2A\sqrt{H_0}} \right]$$

$$B = \frac{\partial F}{\partial qi} \Big|_{\substack{h=h \\ qi=Q}} = \left[\frac{1}{A} \right]$$

Obteniendo así:

$$\dot{h}_0(t) = \left[-\frac{kv}{2A\sqrt{H_0}} \right] [h_0] + \left[\frac{1}{A} \right] [q_0]$$

$$\dot{h}_0(t) = -\frac{kv}{A} \cdot \left(\frac{h_0(t)}{2\sqrt{H_0}} \right) + \frac{q_0(t)}{A}$$

$$K_1 = \frac{kv}{2A\sqrt{H_0}}$$

$$K_2 = \frac{1}{A}$$

El análisis no termina, hasta poder obtener la función de transferencia y saber a qué orden pertenece el sistema. Para poder obtenerla, aplicamos Laplace.

$$S \cdot h_0(s) = -K_1 \cdot h_0(s) + K_2 q_0(s)$$

$$(S + K_1)h_0(s) = K_2 \cdot q_0(s)$$

$$\frac{h_0(s)}{q_0(s)} = \frac{K_2}{S + K_1} \quad (3.2)$$

Esta función que se encontró, se conoce como función de transferencia de primer orden o retardo de primer orden.

3.2. Modelo Matemático de un sistema de llenado de dos tanques en serie.

Este sistema consta de dos tanques acoplados en serie, la sección que los une es de igual dimensión que la salida del tanque dos, por donde fluye un líquido que pasa del primer tanque al segundo tanque, (q_{12}), por medio de este caudal, el tanque dos varía su volumen de llenado, es decir $\frac{h_2(s)}{q_0(s)}$ (variación de la altura del segundo tanque de acuerdo a la alimentación del primer tanque), para esto se deben determinar las funciones de transferencia que relacionen el nivel del primer tanque con el caudal de entrada, el nivel del segundo tanque con el caudal de salida del primer tanque.

Para el análisis de este sistema, trataremos a los tanques por separado, estudiándolos de similar forma como se lo hizo en el subcapítulo 3.1

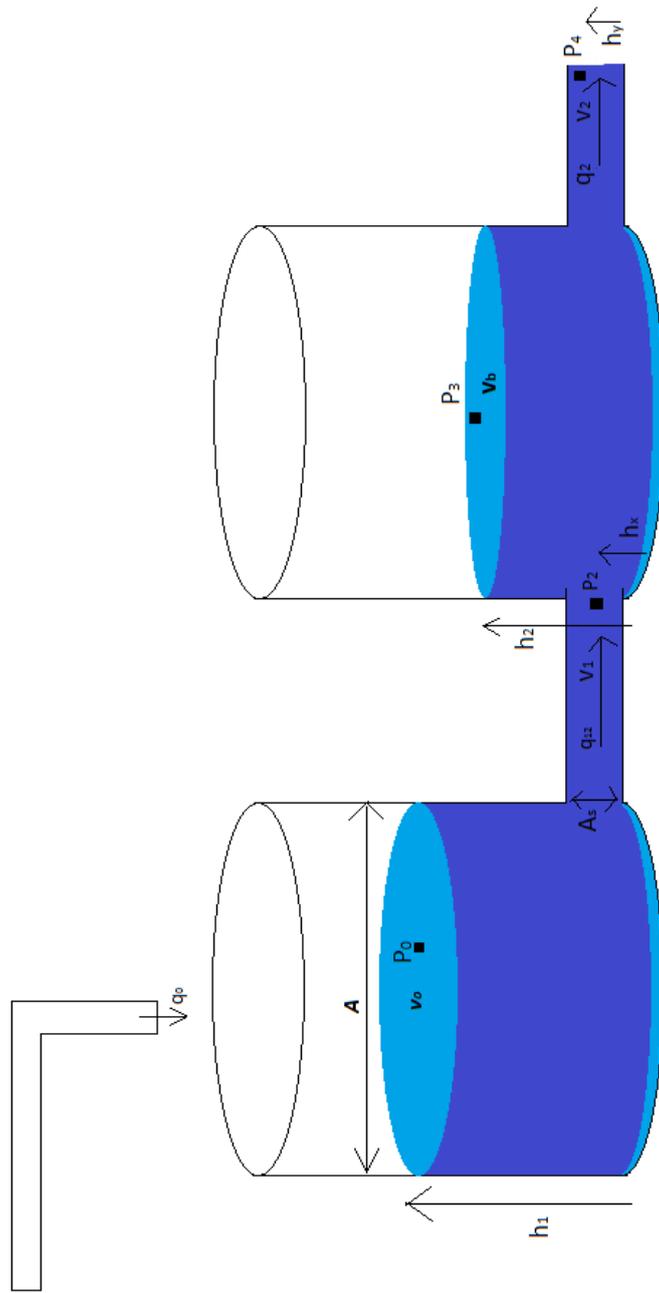


Figura 3. 3. Sistema real de dos tanques en serie.

-Teorema de conservación de la energía mecánica.

$$W = E_c + E_p$$

-Balance de trabajo debido a las fuerzas de presión.

$$W = (P_0 - P_2) \Delta V$$

-Energía cinética.

$$\Delta E_c = \Delta K = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_0^2$$

-Energía potencial.

$$\Delta E_p = \Delta U = \Delta m \cdot g \cdot h_x - \Delta m \cdot g \cdot h_1$$

-Balance de energía mecánica del sistema

$$(P_0 - P_2) \Delta V = \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_1^2 - \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_0^2 + \Delta m \cdot g \cdot h_x - \Delta m \cdot g \cdot h_1$$

Si dividimos cada término entre ΔV y recordamos que $\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V}$,

quedando:

$$(P_0 - P_2) = \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v_0^2 + \rho \cdot g \cdot h_x - \rho \cdot g \cdot h_1$$

En referencia a la Ley de Torricelli: Siendo el área $A \gg A_s$ se considera que el flujo está en reposo en la parte superior, es decir $v_0 = 0$.

Esto se puede explicar mediante la ecuación de continuidad para fluidos.

$$Av_0 = Asv_1$$

La ecuación, nos dice que la velocidad con la que fluye el líquido es alta donde el tubo es estrecho A_s (pequeña) y baja cuando el tubo es ancho A (grande), como h_x es pequeño en comparación a h_1 ; esta es despreciada o toma el valor de cero ($h_x = 0$), dando como resultado:

$$(P_0 - P_2) = \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \frac{1}{2}\rho \overset{0}{v_0^2} + \rho \cdot g \cdot \overset{0}{h_x} - \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$(P_0 - P_2) = \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \rho \cdot g \cdot h_1 \quad (3.3)$$

Mediante la relación de la presión y la profundidad obtenemos la ecuación 3.37, que indica que si se conoce la presión P_0 a un nivel superior, entonces la presión P_2 que es mayor a un nivel inferior, se calcula al sumar el incremento $\rho \cdot g \cdot h_2$.

$$P_2 = P_0 + \rho \cdot g \cdot h_2 \quad (3.4)$$

Reemplazando la ecuación 3.37 con la ecuación 3.36, se obtiene:

$$(P_0 - P_0 - \rho \cdot g \cdot h_2) = \frac{1}{2}\rho v_1^2 - \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$-\rho \cdot g \cdot h_2 = \frac{1}{2}\rho \cdot v_1^2 - \rho \cdot g \cdot h_1$$

$$\frac{1}{2} \cdot v_1^2 = g \cdot h_1 - g \cdot h_2$$

Despejando así la velocidad v_1 :

$$v_1^2 = 2 \cdot g(h_1 - h_2)$$

$$v_1 = \sqrt{2 \cdot g \sqrt{h_1 - h_2}}$$

Como el propósito; es obtener el caudal de salida con respecto a la variación de la altura, se realizara los siguientes artificios matemáticos.

$$q_{12} = A_s v_1$$

$$q_{12} = A_s \sqrt{2 \cdot g \sqrt{h_1 - h_2}}$$

Ya que $A_s \sqrt{2 \cdot g}$ es un valor constante, para simplificar la nomenclatura se lo llamara kv .

$$kv = A_s \sqrt{2 \cdot g}$$

$$q_{12} = kv \sqrt{h_1 - h_2}$$

Siguiendo el mismo análisis se tratara al tanque derecho del sistema:

$$W = E_c + E_p$$

$$(P_3 - P_4) = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v_b^2 + \rho g h_y - \rho g h_2$$

$$(P_3 - P_4) = \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho \overbrace{v_b^2}^0 + \rho g \overbrace{h_y}^0 - \rho g h_2$$

Tanto P_3 y P_4 son presiones atmosféricas; en consecuencia estas se anularan $(P_3 - P_4) = 0$, dando como resultado:

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 - \rho g h_2 = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho g h_2$$

$$v_2^2 = 2gh_2$$

$$v_2 = \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2}$$

$$q_2 = A_s \sqrt{2 \cdot g \cdot h_2} \rightarrow kv = A_s \sqrt{2g}$$

$$q_2 = kv \sqrt{h_2}$$

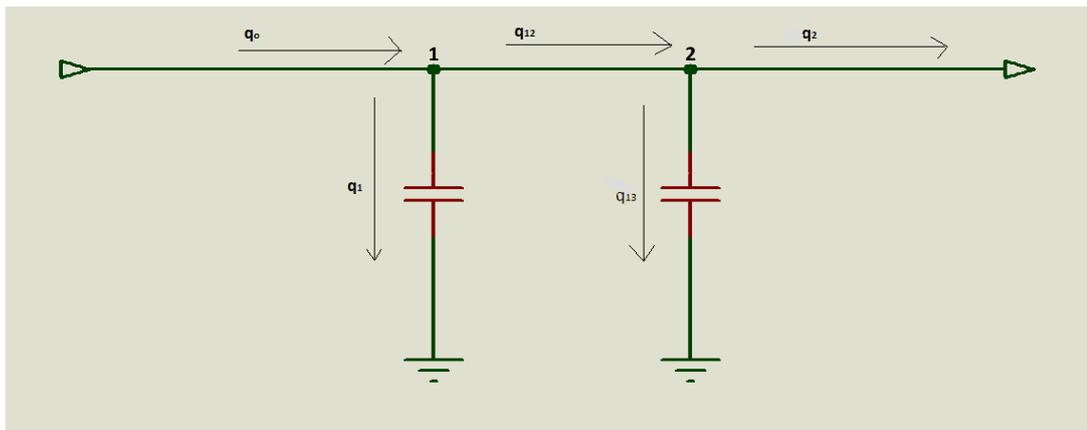


Figura 3. 4. Representación eléctrica de dos tanques en serie

A través de la representación eléctrica del sistema, se percibe la existencia de dos Nodos, aplicando las leyes de Kirchoff a cada uno, obteniendo en el nodo uno la ecuación 3.5.

$$\rightarrow q_0 = q_1 + q_{12}$$

$$q_0 = Ah_1 + kv\sqrt{h_1 - h_2}$$

$$Ah_1 = q_0 + kv\sqrt{h_1 - h_2}$$

$$\dot{h}_1 = \frac{q_0}{A} + \frac{kv}{A} \sqrt{h_1 - h_2} \quad (3.5)$$

En el nodo dos la ecuación 3.6.

$$\begin{aligned} \rightarrow q_{12} &= q_{13} + q_2 \\ kv\sqrt{h_1 - h_2} &= Ah_2 + kv\sqrt{h_2} \\ \dot{h}_2 &= \frac{kv}{A} \sqrt{h_1 - h_2} - \frac{kv}{A} \sqrt{h_2} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Debido a que la ecuación 3.5 y la ecuación 3.6, son no lineales por su segundo término del lado derecho de la primera ecuación y en la segunda ecuación ambos lo son, no será posible resolverla de manera analítica, por eso es necesario linealizar el sistema de ecuaciones; aplicando la técnica de expansión de series de Taylor, se deberá linealizar con respecto a h_1 y h_2 .

Partiendo por definición:

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial h_1} & \frac{\partial f_1}{\partial h_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial h_1} & \frac{\partial f_2}{\partial h_2} \end{bmatrix}_{(h=\bar{h}, q_i=Q)} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial q} \\ \frac{\partial f_2}{\partial q} \end{bmatrix}_{(h=\bar{h}, q_i=Q)}$$

$$A = \frac{\partial F}{\partial h} \Big|_{\substack{h=\bar{h} \\ qi=Q}} = \begin{bmatrix} -\frac{kv}{2A\sqrt{h_1 - h_2}} & \frac{kv}{2A\sqrt{h_1 - h_2}} \\ \frac{kv}{2A\sqrt{h_1 - h_2}} & -\frac{kv}{2A\sqrt{h_1 - h_2}} - \frac{kv}{2A\sqrt{h_2}} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{h=\bar{h} \\ qi=Q}}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{kv}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} & \frac{kv}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} \\ \frac{kv}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} & -\frac{kv}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} - \frac{kv}{2A\sqrt{H_2}} \end{bmatrix}$$

$$B = \frac{\partial F}{\partial qi} \Big|_{\substack{h=h \\ qi=Q}} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{A} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \dot{h}_1 = -\frac{kv}{A} \left(\frac{h_1(t)}{2\sqrt{H_1 - H_2}} - \frac{h_2(t)}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \right) + \frac{q_0(t)}{A}$$

$$\dot{h}_1 = -\frac{kv h_1(t)}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{kv h_2(t)}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{q_0(t)}{A}$$

$$K_1 = \frac{kv}{2A\sqrt{H_1 - H_2}}$$

$$K_2 = \frac{1}{A}$$

$$\dot{h}_1 = -K_1 h_1(t) + K_1 h_2(t) + K_2 q_0(t) \quad (3.7)$$

$$\rightarrow \dot{h}_2 = \frac{kv}{A} \left(\frac{h_1(t)}{2\sqrt{H_1 - H_2}} - \frac{h_2(t)}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \right) - \frac{kv h_2(t)}{2A\sqrt{H_2}}$$

$$\dot{h}_2 = \frac{kv h_1(t)}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} - \frac{kv h_2(t)}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} - \frac{kv h_2(t)}{2A\sqrt{H_2}}$$

$$K_3 = \frac{kv}{2A\sqrt{H_2}}$$

$$\dot{h}_2 = K_1 h_1(t) - K_1 h_2(t) - K_3 h_2(t) \quad (3.8)$$

Aplicando la transformada de Laplace, tenemos:

$$\rightarrow \dot{h}_1 = -K_1 h_1(t) + K_1 h_2(t) + K_2 q_0(t)$$

$$S h_1(s) = -K_1 h_1(s) + K_1 h_2(s) + K_2 q_0(s)$$

$$(S + K_1) h_1(s) = K_1 h_2(s) + K_2 q_0(s)$$

$$(S + K_1) = \frac{K_1 h_2(s)}{h_1(s)} + \frac{K_2 q_0(s)}{h_1(s)}$$

La función de transferencia $\frac{h_2(s)}{h_1(s)}$, que representa la relación entre la altura del tanque dos con la altura del tanque uno.

$$\rightarrow \dot{h}_2 = K_1 h_1(t) - K_1 h_2(t) - K_3 h_2(t)$$

$$S h_2(s) = K_1 h_1(s) - K_1 h_2(s) - K_3 h_2(s)$$

$$S h_2(s) = K_1 h_1(s) - K_1 h_2(s) - K_3 h_2(s)$$

$$(S + (K_1 + K_3)) h_2(s) = K_1 h_1(s)$$

$$\frac{h_2(s)}{h_1(s)} = \frac{K_1}{s + (K_1 + K_3)} \quad (3.9)$$

La función de transferencia $\frac{q_0(s)}{h_1(s)}$, que representa la relación entre la el caudal de alimentación y la altura del tanque 1.

$$(S + K_1) = \frac{K_1^2}{S + (K_1 + K_3)} + \frac{K_2 q_0(s)}{h_1(s)}$$

$$\frac{K_2 q_0(s)}{h_1(s)} = (S + K_1) - \frac{K_1^2}{S + (K_1 + K_3)}$$

$$\frac{K_2 q_0(s)}{h_1(s)} = \frac{(S + K_1)(S + (K_1 + K_3)) - K_1^2}{S + (K_1 + K_3)}$$

$$\frac{q_0(s)}{h_1(s)} = \frac{(S + K_1)(S + (K_1 + K_3)) - K_1^2}{(S + (K_1 + K_3))K_2} \quad (3. 10)$$

A partir de la ecuación 3.9 y ecuación 3.10, logramos obtener $\frac{h_2(s)}{q_0(s)}$, que representa a la variación de la altura del segundo tanque, de acuerdo a la alimentación del primer tanque.

$$\frac{h_2(s)}{h_1(s)} \cdot \frac{h_1(s)}{q_0(s)} \Rightarrow \frac{h_2(s)}{q_0(s)}$$

$$\frac{h_2(s)}{q_0(s)} = \frac{K_1}{s + (K_1 + K_3)} \cdot \frac{S + (K_1 + K_3)K_2}{(S + K_1)(S + (K_1 + K_3)) - K_1^2}$$

$$0 = S^2 + S(K_1 + K_3) + SK_1 + (K_1^2 + K_1 + K_3) - K_1^2$$

$$\frac{K_1 K_2}{S^2 + S(2K_1 + K_3) + K_1 K_3} \Rightarrow \frac{h_2(s)}{q_0(s)} \quad (3. 11)$$

La ecuación 3.11, expresa una función de transferencia de segundo orden, a partir de su desarrollo es muy simple ver que se forma con dos funciones de transferencia de primer orden en serie.

3.3. Modelo Matemático de un sistema de llenado de tres tanques en serie.

Con la adición de otro tanque, se extiende el proceso mostrado en la figura 3.5, en este nuevo proceso se hallaran las funciones de transferencia que ayuden a relacionar el nivel del tercer tanque con el flujo de entrada del primer tanque.

Puesto que ya se obtuvieron las ecuaciones para los dos primeros tanques, ahora se desarrollará el análisis del segundo tanque con respecto al tercer tanque.

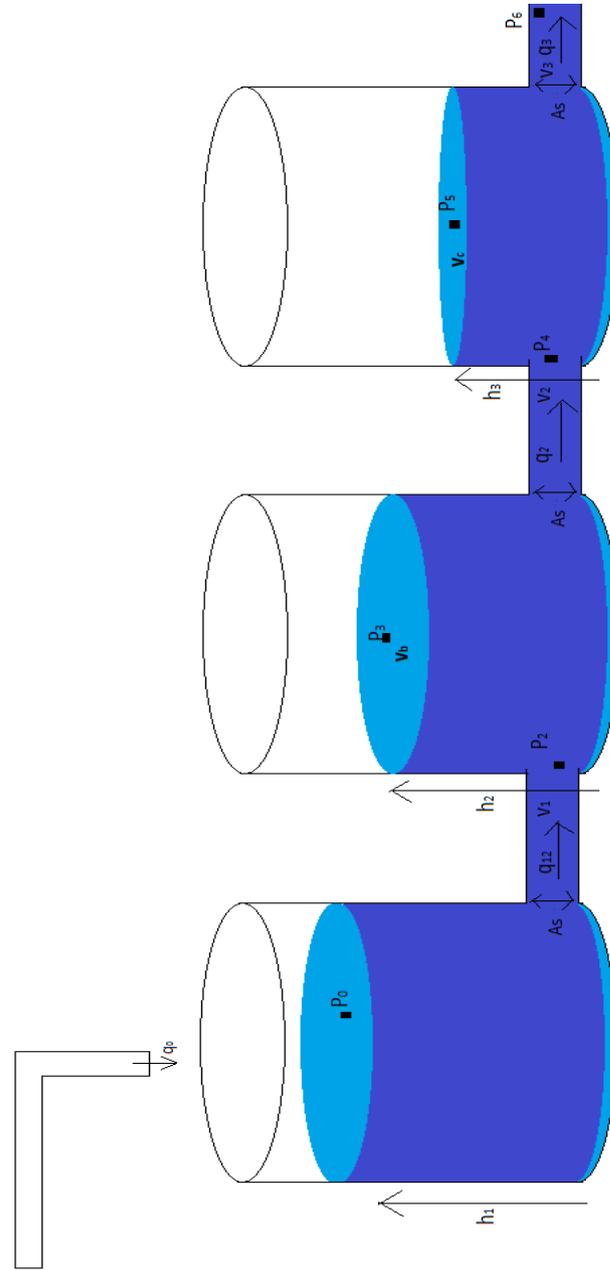


Figura 3. 5. Representación real de Tres tanques en serie.

$$W = E_c + E_p$$

$$(P_3 - P_4) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho v_b^2 + \rho g h_y - \rho g h_2$$

$$(P_3 - P_4) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \frac{1}{2}\rho \overbrace{v_b^2}^0 + \rho g \overbrace{h_y}^0 - \rho g h_2$$

$$(P_3 - P_4) = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \rho g h_2$$

$$P_4 = P_5 - \rho g h_3$$

$$P_5 = P_3 = P_0 = \text{presiones atmosféricas}$$

Por lo tanto:

$$-\rho g h_3 = \frac{1}{2}\rho v_2^2 - \rho g h_2$$

$$\frac{1}{2}\rho v_2^2 = \rho g h_2 - \rho g h_3$$

$$v_2^2 = 2g(h_2 - h_3)$$

$$v_2 = \sqrt{2g}\sqrt{h_2 - h_3}$$

$$v_2 = A_s\sqrt{2g}\sqrt{h_2 - h_3}$$

$$q_2 = A_s\sqrt{2g}\sqrt{h_2 - h_3} \rightarrow kv = A_s\sqrt{2g}$$

$$q_2 = kv\sqrt{h_2 - h_3}$$

Deduciendo el tercer tanque

$$(P_5 - P_6) = \frac{1}{2}\rho v_3^2 - \frac{1}{2}\rho v_c^2 + \rho g h_z - \rho g h_3$$

$$(P_5 - P_6) = \frac{1}{2}\rho v_3^2 - \frac{1}{2}\rho \overbrace{v_c^2}^0 + \rho g \overbrace{h_z}^0 - \rho g h_3$$

$$(P_5 - P_6) = \frac{1}{2}\rho v_3^2 - \rho g h_3$$

P_5 y P_6 son presiones atmosféricas; en consecuencia estas se anularán ($P_5 - P_6) = 0$, dando como resultado:

$$\frac{1}{2}\rho v_3^2 - \rho g h_3 = 0$$

$$\frac{1}{2}\rho v_3^2 = \rho g h_3$$

$$v_3^2 = 2gh_3$$

$$v_3 = \sqrt{2g}\sqrt{h_3}$$

$$q_3 = A_s\sqrt{2g}\sqrt{h_3} \rightarrow kv = A_s\sqrt{2g}$$

$$q_3 = kv\sqrt{h_3}$$

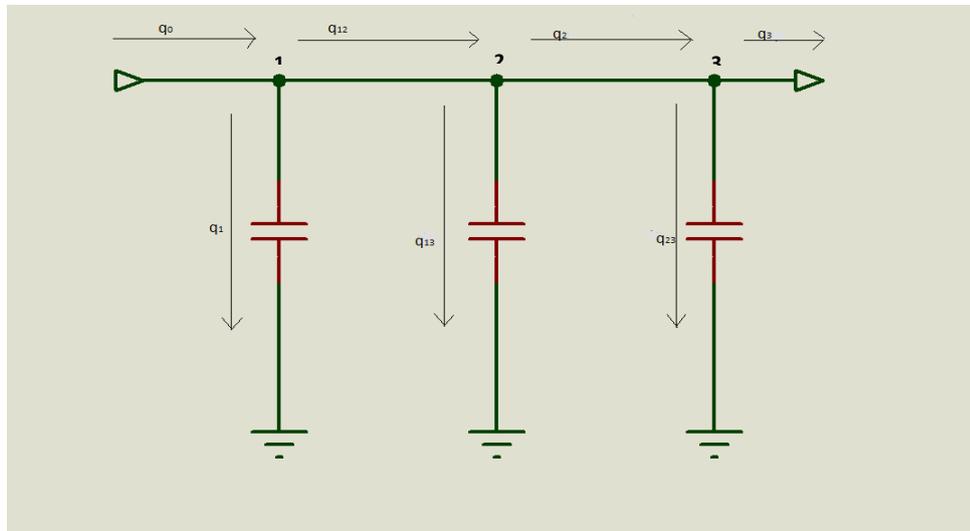


Figura 3. 6. Representación eléctrica del llenado de tres tanques.

En la figura 3.6, se procederá a detallar la composición de cada nodo, obteniendo.

-Para el nodo uno:

$$\begin{aligned} \rightarrow q_0 &= q_1 + q_{12} \\ q_0 &= Ah_1 + kv\sqrt{h_1 - h_2} \end{aligned}$$

-Para el nodo dos:

$$\begin{aligned} \rightarrow q_{12} &= q_{13} + q_2 \\ kv\sqrt{h_1 - h_2} &= Ah_2 + kv\sqrt{h_2 - h_3} \end{aligned}$$

-Para el nodo tres:

$$\begin{aligned} \rightarrow q_2 &= q_{23} + q_3 \\ kv\sqrt{h_2 - h_3} &= Ah_3 + kv\sqrt{h_3} \end{aligned}$$

Ordenando las ecuaciones, realizando su respectiva linealización y transformada de Laplace, se consigue las siguientes ecuaciones.

-Nodo uno:

$$\begin{aligned} \rightarrow q_0 &= Ah_1 + kv\sqrt{h_1 - h_2} \\ Ah_1 &= q_0 - kv\sqrt{h_1 - h_2} \\ \dot{h}_1 &= \frac{q_0}{A} - \frac{kv}{A}\sqrt{h_1 - h_2} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \dot{h}_1 = -\frac{kv}{A} \left(\frac{h_1(t)}{2\sqrt{H_1 - H_2}} - \frac{h_2(t)}{2\sqrt{H_1 - H_2}} \right) + \frac{q_0(t)}{A}$$

$$\dot{h}_1 = -\frac{kv h_1(t)}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{kv h_2(t)}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{q_0(t)}{A}$$

$$k_1 = \frac{kv}{2A\sqrt{H_1 - H_2}}$$

$$k_2 = \frac{1}{A}$$

$$k_3 = \frac{kv}{2A\sqrt{H_2 - H_3}}$$

$$k_4 = \frac{kv}{2A\sqrt{H_3}}$$

$$S h_1(s) = \frac{q_0}{A} - \frac{kv h_1(s)}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} + \frac{kv h_2(s)}{2A\sqrt{H_1 - H_2}}$$

$$S h_1(s) = \frac{1}{A} q_0 - k_1 h_1(s) + k_1 h_2(s)$$

$$h_1(S + k_1) = k_2 q_0(s) + k_1 h_2(s)$$

$$(S + k_1) = k_2 \frac{q_0(s)}{h_1(s)} + k_1 \frac{h_2(s)}{h_1(s)} \quad (3.12)$$

-Nodo dos:

$$A \dot{h}_2 = kv \sqrt{h_1 - h_2} - kv \sqrt{h_2 - h_3}$$

$$\dot{h}_2 = \frac{kv}{A} (\sqrt{h_1 - h_2} - \sqrt{h_2 - h_3})$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{kv}{A} \left(\left(\frac{1}{2} \frac{h_1(t)}{\sqrt{H_1 - H_2}} - \frac{1}{2} \frac{h_2(t)}{\sqrt{H_1 - H_2}} \right) - \left(\frac{1}{2} \frac{h_2(t)}{\sqrt{H_2 - H_3}} - \frac{1}{2} \frac{h_3(t)}{\sqrt{H_2 - H_3}} \right) \right)$$

$$\dot{h}_2(t) = \frac{kv h_1(t)}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} - \frac{kv h_2(t)}{2A\sqrt{H_1 - H_2}} - \frac{kv h_2(t)}{2A\sqrt{H_2 - H_3}} + \frac{kv h_3(t)}{2A\sqrt{H_2 - H_3}}$$

$$\dot{h}_2(t) = k_1 h_1(t) - k_1 h_2(t) - k_3 h_2(t) + k_3 h_3(t)$$

$$S h_2(s) = k_1 h_1(s) - k_1 h_2(s) - k_3 h_2(s) + k_3 h_3(s)$$

$$(S + (k_1 + k_3)) h_2(s) = k_1 h_1(s) + k_3 h_3(s)$$

$$S + (k_1 + k_3) = k_1 \frac{h_1(s)}{h_2(s)} + k_3 \frac{h_3(s)}{h_2(s)} \quad (3.13)$$

-Nodo tres:

$$\rightarrow kv\sqrt{h_2 - h_3} = A\dot{h}_3 + kv\sqrt{h_3}$$

$$A\dot{h}_3 = kv\sqrt{h_2 - h_3} - kv\sqrt{h_3}$$

$$\dot{h}_3 = \frac{kv}{A} (\sqrt{h_2 - h_3} - \sqrt{h_3})$$

$$\dot{h}_3 = \frac{kv}{A} \left(\frac{1}{2} \frac{h_2}{\sqrt{H_2 - H_3}} + \left(-\frac{h_3}{2\sqrt{H_2 - H_3}} - \frac{h_3}{2\sqrt{H_3}} \right) \right)$$

$$\dot{h}_3 = \frac{k\nu h_2}{2A\sqrt{H_2 - H_3}} - \frac{k\nu h_3}{2A\sqrt{H_2 - H_3}} - \frac{k\nu h_3}{2A\sqrt{H_3}}$$

$$\dot{h}_3 = k_3 h_2 - k_3 h_3 - k_4 h_3$$

$$S h_3 = k_3 h_2 - k_3 h_3 - k_4 h_3$$

$$h_3(S + (k_3 + k_4)) = k_3 h_2$$

$$\frac{h_3(s)}{h_2(s)} = \frac{k_3}{(S + (k_3 + k_4))} \quad (3. 14)$$

Reemplazando $\frac{h_3(s)}{h_2(s)}$, en la ecuación 3.13 para encontrar $\frac{h_1(s)}{h_2(s)}$,

tenemos:

$$(S + (k_1 + k_3)) = k_1 \frac{h_1}{h_2} + \frac{k_3^2}{(S + (k_3 + k_4))}$$

$$(S + (k_1 + k_3)) - \frac{k_3^2}{(S + (k_3 + k_4))} = k_1 \frac{h_1}{h_2}$$

$$\frac{h_1(s)}{h_2(s)} = \frac{(S + (k_3 + k_4))(S + (k_1 + k_3)) - k_3^2}{(S + (k_3 + k_4))k_1} \quad (3. 15)$$

Con la ayuda de $\frac{h_1(s)}{h_2(s)}$, en la ecuación 3.45, obtenemos $\frac{q_0(s)}{h_1(s)}$.

$$(S + k_1) = k_2 \frac{q_0}{h_1} + \frac{k_1^2(S + (k_3 + k_4))}{(S + (k_3 + k_4))(S + (k_1 + k_3)) - k_3^2}$$

$$(S + k_1) - \frac{k_1^2(S + (k_3 + k_4))}{(S + (k_3 + k_4))(S + (k_1 + k_3)) - k_3^2} = k_2 \frac{q_0}{h_1}$$

$$\frac{(S + k_1) \left((S + (k_3 + k_4))(S + (k_1 + k_3)) - k_3^2 \right) - k_1^2(S + (k_3 + k_4))}{\left((S + (k_3 + k_4))(S + (k_1 + k_3)) - k_3^2 \right) k_2}$$

$$= \frac{q_0}{h_1}$$

Realizando el siguiente artificio matemático $\frac{h_3(s)}{h_2(s)} \cdot \frac{h_2(s)}{h_1(s)} \cdot \frac{h_1(s)}{q_0(s)}$,
obtendremos $\frac{h_3(s)}{q_0(s)}$.

$$\frac{k_3 k_1 k_2}{(S + k_1) \left((S + (k_3 + k_4))(S + (k_1 + k_3)) - k_3^2 \right) - k_1^2(S + (k_3 + k_4))}$$

$$= \frac{h_3(s)}{q_0(s)}$$

$$\frac{k_3 k_1 k_2}{(S + k_1)(S^2 + S(k_1 + 2k_3 + k_4) + (k_1 k_3 + k_1 k_4 + k_4 k_3)) - k_1^2(S + (k_3 + k_4))}$$

$$= \frac{h_3(s)}{q_0(s)}$$

$$\frac{k_1 k_2 k_3}{S^3 + S^2(2k_1 + 2k_3 + k_4) + S(3k_1 k_3 + 2k_1 k_4 + k_3 k_4) + k_1 k_3 k_4} = \frac{h_3(s)}{q_0(s)}$$

Se obtiene así una función de transferencia de orden tres o superior.

3.4. Diseño del tanque.

Tabla 1 Valor de los parámetros.

Parámetros	Valor	Unidades
Caudal Q	2	m^3/s
Área de la base A	10	m
Área de interconexión A_s	1	m
Gravedad g	9.8	m/s^2

Este diseño se realizó bajo las siguientes especificaciones.

Para poder lograr realizar las respectivas simulaciones, se debió encontrar las condiciones de equilibrio del sistema, haciendo que sus ecuaciones no linealizadas; las derivadas sean igualadas a cero y el caudal como q.

De esta manera se tiene:

-Sistema de un tanque.

$$h_0 = \left(\frac{q}{kv}\right)^2$$

-Sistema de dos tanques.

$$h_1 = 2h_2 \quad h_2 = \left(\frac{q}{kv}\right)^2 \quad h_1 = 2 \left(\frac{q}{kv}\right)^2$$

CAPÍTULO 4

4. Utilización de simuladores para modelamiento de sistemas.

Mediante los simuladores que se usarán, como Matlab, Scilab y Modelica, se ingresaran los datos o parámetros que serán cargados en el modelo, adicionalmente se establecerán los sucesos y requerimientos de simulación y así mismo, mediante esta interface se obtendrán los resultados de los modelos, consiguiendo como ventaja modificarlo si se necesitase mejores resultados.

4.1. Matlab.

El nombre Matlab es un acrónimo de: "MATrix LABoratory" (Laboratorio de Matrices), ofrece un entorno de desarrollo integrado con un lenguaje de programación propio, es un software creado para cálculos numéricos complejos y visualización de datos, su elemento

básico de trabajo son las matrices; ya que éstas son muy eficientes en la descripción y representación de funciones lineales, con gran aporte en aplicaciones en la ingeniería, como la simulación de modelos matemáticos.

Mediante el uso de matrices Matlab consigue disminuir la complejidad numérica en un script, logrando un ahorro de tiempo de la implementación del algoritmo, en comparación con otros lenguajes de programación como c o c++, otro punto es que Matlab no requiere de dimensionamiento previo de la matriz.

Se ha considerado a Matlab como una herramienta de investigación, ya que dentro de este encontramos un sin número de programas conocidos como toolboxes, dirigidos específicamente a la ingeniería y a modelamiento de sistemas dinámicos, y como si fuera poco cuenta con una programación gráfica llamada Simulink la cual es una extensión de Matlab, que ayuda a la simulación tanto de funciones lineales como no lineales.

4.1.1. Por qué usar Matlab?

El entorno de trabajo que presenta Matlab es agradable, con una programación de alto nivel, con gran ayuda en la comparación de datos y de fácil ajuste de escala; en el modelamiento de sistemas

se necesita observar las señales de salida, tanto en sistemas lineales como no lineales.

Matlab te facilita muchas veces el trabajo, con sus aplicaciones ya creadas y establecidas para ciertos parámetros de ingeniería, y a su vez te permite crear más aplicaciones según las necesidades del usuario, tiene una gama amplia de aplicaciones en el estudio de la ingeniería.

4.1.2. Desarrollo de la herramienta de simulación.

La simulación del sistema en Matlab será mediante comandos (Script) y Simulink, en cada una de ellas se analizará los resultados, para comprobar la eficiencia y eficacia de cada una de estas dos herramientas en este ámbito. Las funciones de transferencia obtenidas del modelo matemático de los sistemas, son guía para construir nuestro programa y los bloques, en Matlab y su plataforma Simulink, respectivamente.

Simulink, cuenta con una amplia gama de toolboxes.

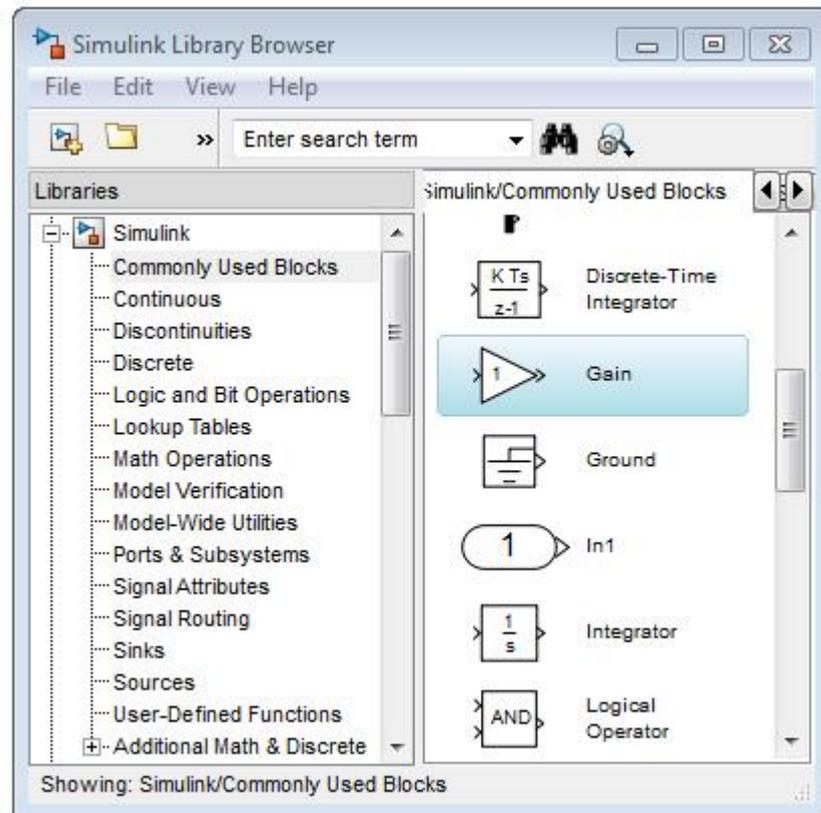


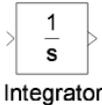
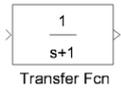
Figura 4. 1. Librería de simulink.

A continuación se hará una breve descripción de estos bloques para poder entender el funcionamiento del modelo desarrollado en Simulink.

Librería Sources.

	<p>Step.</p> <p>Este bloque se encuentra dentro de Simulink / Blocks / Sources con el nombre de Step, genera la función pulso.</p> <p>Para parametrizarlo, se debe especificar la duración del pulso (Steptime), valor inicial (Initialvalue) y amplitud o valor final (Final value) del pulso, los parámetros pueden ser modificados desde la interface.</p>
	<p>Ramp.</p> <p>Este bloque lo podemos encontrar dentro de Simulink / Blocks / Sources con el nombre de Ramp, sirve para generar la función rampa. Al igual que el anterior bloque este se configura de una manera muy simple, los parámetros son la pendiente (Slope), tiempo de inicio (Start time) y valor inicial (Initial output). Al igual que en el anterior caso, los parámetros son modificables desde la interface</p>

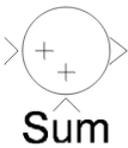
Librería de Sistemas lineales.

 <p>Integrator</p>	<p>Integrator.</p> <p>El bloque 'Integrator' integra su entrada. Los resultados de la integración van a depender del método de integración que se seleccione en el menú 'Configuration Parameters' al que se accede mediante la opción marcada como 'Parámetros de simulación'. El programa Simulink trata el bloque integrador como un sistema dinámico con un estado, su salida. La entrada de este bloque es la derivada en el tiempo del estado. El algoritmo de integración numérica seleccionado calcula la salida del bloque integrador en el periodo de muestreo actual usando el valor de entrada actual y del paso anterior. El bloque también provee una opción de condición inicial que permite configurar el estado inicial.</p>
 <p>Transfer Fcn</p>	<p>Transfer Fcn.</p> <p>El bloque Transfer Fcn implementa una función de transferencia con la entrada $U(s)$ y la salida $Y(s)$, como se muestra a continuación: $G(s) = \frac{U(s)}{Y(s)}$</p>

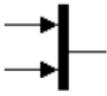
Librería de sumidero.

 <p>Scope</p>	<p>Scope.</p> <p>El bloque 'Scope' representa gráficamente la entrada conectada a este bloque con respecto al tiempo de simulación. Este bloque permite representar varias variables a la vez para el mismo periodo de tiempo. El 'Scope' permite ajustar el tiempo y el rango de los valores de entrada presentados. Se puede mover y redefinir el tamaño de la ventana 'Scope' y se puede modificar los valores de sus parámetros durante la simulación.</p>
--	---

Librería de operaciones matemáticas.

	<p>Sum.</p> <p>El bloque 'Sum' es la implementación del bloque suma. Este bloque realiza las operaciones de adición o sustracción de sus entradas, pudiendo sumar o sustraer entradas escalares, vectoriales o matriciales. Se puede también sumar los elementos de un único vector entrada. Las operaciones del bloque son definidas en el parámetro 'List of Signs': más (+), menos (-) y separador (). El separador crea un espacio o extra entre puertos en el icono del bloque. La forma del icono se puede definir como redonda o rectangular (del inglés round o rectangular) a través del parámetro 'Icon shape' en la ventana de dialogo de parámetros.</p>
	<p>Gain.</p> <p>Bloque llamado Gain se encuentra en Simulink/Blocks/CommonlyUsed. Lo que hace es multiplicar la señal de entrada por una constante.</p>

Librería de Ruta de Señales.

	<p>Mux.</p> <p>Bloque llamado Mux, multiplexa o combina las entradas en un solo vector de salida. Se encuentra en Simulink / Blocks / CommonlyUsed.</p>
---	--

Para poder realizar un script dentro del editor de Matlab; se deberá conocer previamente ciertos comandos, que nos facilitará el trabajo en modelado.



Desde New Script se podrá acceder al editor.

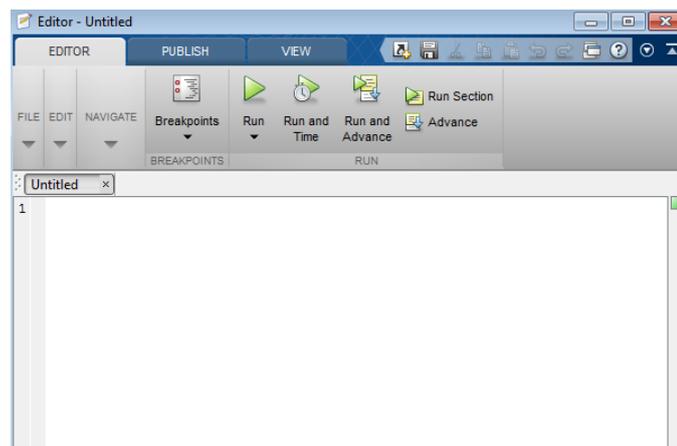


Figura 4. 2. Área de trabajo del editor.

Algunos comandos para programar son muy parecidos a los de C++ o C, se detallarán a continuación.

Comandos para el Editor.

Clc, clear.	Borra todas las entradas y salida de la pantalla de la ventana de comandos, así como de las variables del área de trabajo.
Step.	Calcula la respuesta paso de un sistema dinámico.
Impulse	Calcula la respuesta impulso unitario de un modelo de sistema dinámico.
Lsim	Simula la respuesta de los sistemas lineales continuos o discretos a las entradas arbitrarias.
Plot	Grafica datos obtenidos, en un plano cartesiano.

4.1.2.1. Análisis del sistema de un solo tanque con entradas Step, Impulse, Ramp mediante Script y Simulink.

Escalón.

Dentro de la ventana del Editor de Matlab, procederemos a realizar la programación para **un tanque**, empezando desde la primera línea con **clear,clc** estos dos comandos ayudan en la limpieza de la pantalla y a su vez de la memoria del sistema, en las líneas tres y cinco, se establecen dos matrices **A y B**

cuyas dimensiones son de uno por dos y uno por uno respectivamente; que representan el denominador y numerador de la función de transferencia, a continuación en la séptima se define el tiempo de simulación t el cual da un alto a la representación gráfica de los datos en **25 seg**, después en la décima se tiene la variable y , la cual almacena los datos de la función evaluada en la señal de entrada, como lo es **Step**, que representa el escalón unitario, para finalizar el código, se gráfica mediante el comando **plot** en un plano x vs y y la respuesta del sistema.

```
STEP.
clc,clear
%DENOMINADOR DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
A=[1 0.49];
%NUMERADOR DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
B=[0.1];
% TIEMPO DE SIMULACION
t=[0:0.01:25];
%EVALUACION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
%A LA ENTRADA ESCALON
y=step(B,A,t);
%GRAFICA Y TITULOS
plot(t,y);
title('Respuesta a un escalón unitario');
xlabel('Tiempo');
grid;
```

Figura 4. 3. Código de matlab entrada escalón

Se logra simular la ecuación 3.1 y la ecuación lineal, en el Simulink, mediante el diagrama de bloques que corresponde a la figura 4.6, que trata la respuesta a la

entrada Step (escalón unitario) mostradas en el Scope y Scope1, del sistema no lineal y lineal respectivamente, además en el Scope2 se aprecia que sistema posee la característica de un tiempo de respuesta menor para lograr la estabilización.

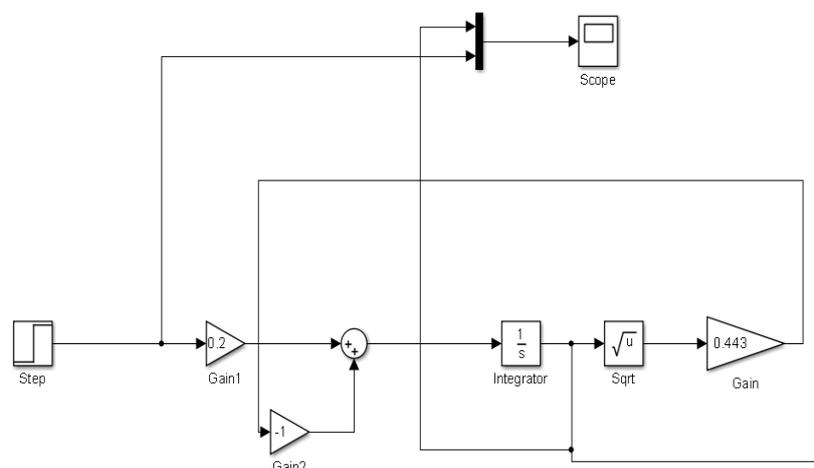


Figura 4. 4. Construcción de los bloques de la ecuación no lineal de un tanque

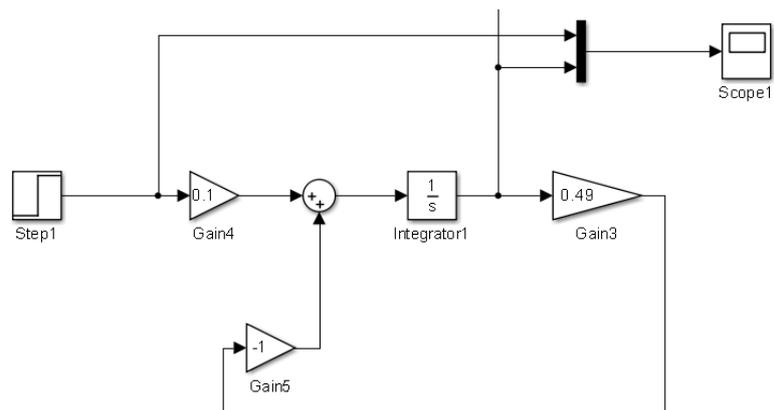


Figura 4. 5. Construcción de los bloques de la ecuación lineal de un tanque

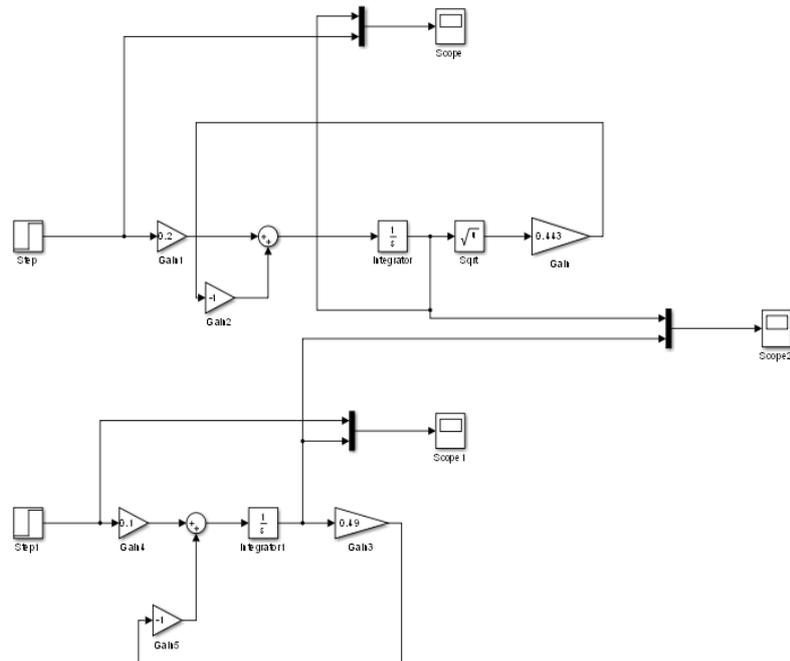


Figura 4. 6. Diseño para comparación de ecuaciones lineales y no lineales.

En el bloque de la función step, se realiza el ingreso de los siguientes parámetros Step time 0 que es donde cambia la señal de un Initial value 0 a un Final value 1, como se muestra en la figura 4.7.

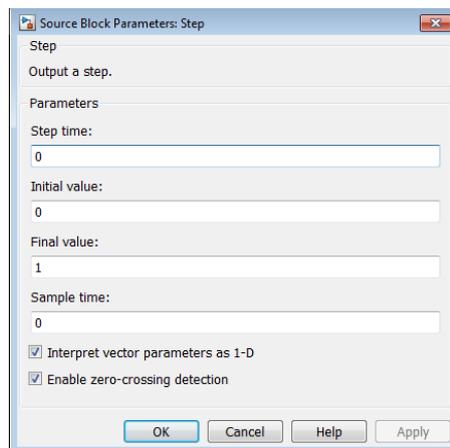


Figura 4. 7. Parámetros entrada step

Procederemos a realizar los mismos cambios, en los parámetros para el bloque Step 1, perteneciente al sistema lineal.

Obteniendo así la figura 4.8 del Script y la figura 4.9 del Simulink.

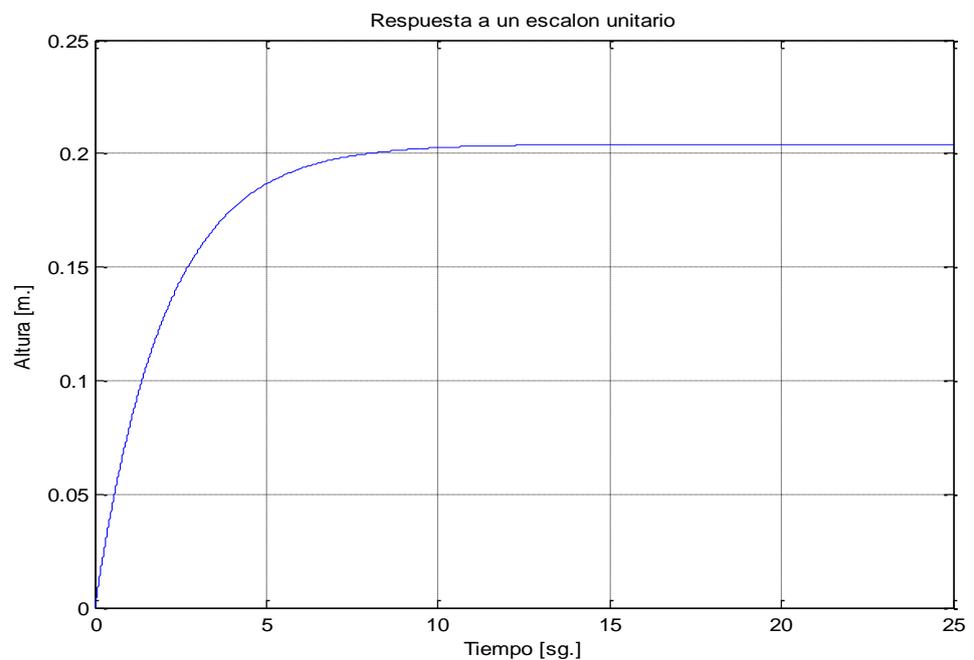


Figura 4. 8. Respuesta en el código entrada escalón

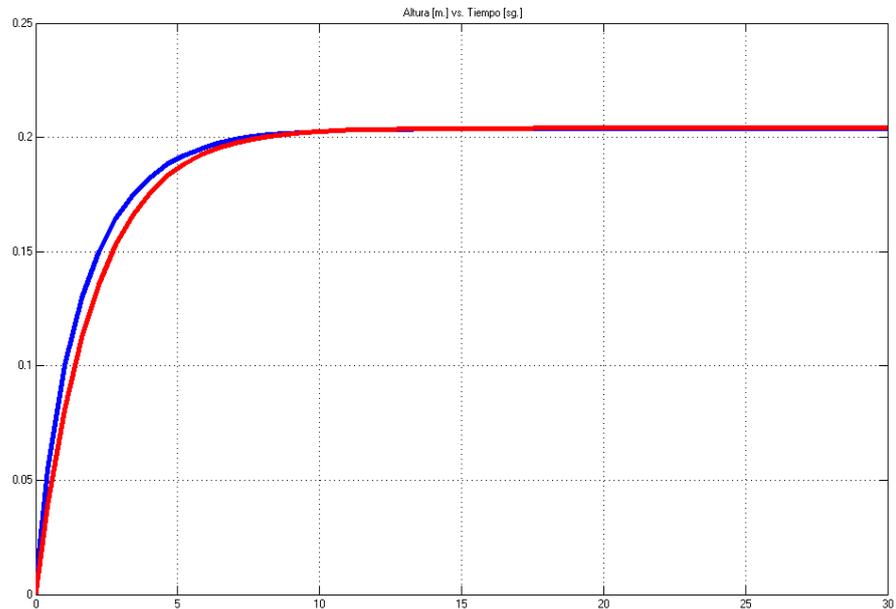


Figura 4. 9. Respuesta en simulink entrada escalón

Impulso.

La escritura del código para la simulación de este sistema mediante script, es similar al de la entrada step, desde la línea 1 hasta la línea 7, con la diferencia que la variable y almacena los datos de la función evaluada en la señal de entrada, como lo es ***Impulse***, que representa al impulso, para finalizar el código, se grafica mediante el comando ***plot*** en un plano x vs y la respuesta del sistema.

```
clc,clear
%DENOMINADOR DE LA FUNCION DE
TRANSFERENCIA
A=[1 0.49];
%NUMERADOR DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
B=[0.1];
% TIEMPO DE SIMULACION
t=[0:0.01:25];
%EVALUACION DE LA FUNCION DE
TRANSFERENCIA
%A LA ENTRADA ESCALON
y=impulse(B,A,t);
%GRAFICA Y TITULOS
plot(t,y);
title('Respuesta a un impulso');
xlabel('Tiempo');
grid;
```

Figura 4. 10. Código de matlab entrada impulso un tanque

La implementación en Simulink, figura 4.11, se distingue del diagrama de bloques del sistema con entrada Step, porque en éste se crea un bloque que representa una función de transferencia, que ha sido realizada debido a que si se implementará con una ecuación tipo uno, como es en este caso, arrojaría errores en la simulación, en consecuencia esta ecuación tipo uno es convertida a una función de transferencia tipo cero mediante la transformada de Laplace.

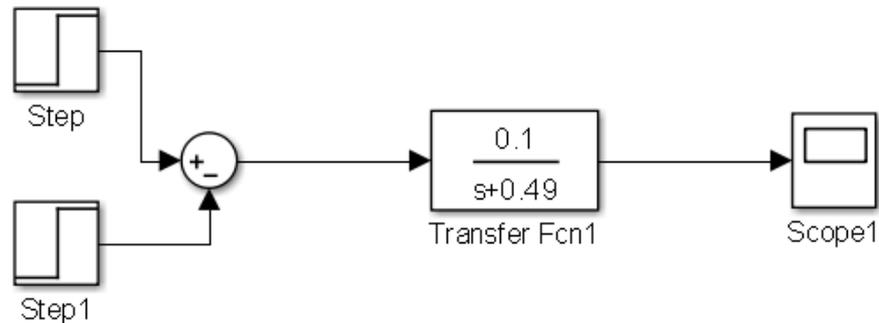


Figura 4. 11. Construcción del bloque de la f. transferencia de un tanque.

En las herramientas de Simulink encontramos sources o fuentes, con el inconveniente que solo se haya la función ramp y step, es decir, impulse no está incluida, por lo cual se elaboró esta señal, mediante la diferencia de dos funciones step, logrando una señal impulso muy cercana a cero con los siguientes parámetros step time igual a 0.025 para el bloque step y 0.05 para el bloque step1 que son los valores donde las señales cambian del parámetro Initial value igual a 0 y Final value igual a 1 como se muestra en la figura 4.12 y figura 4.13.

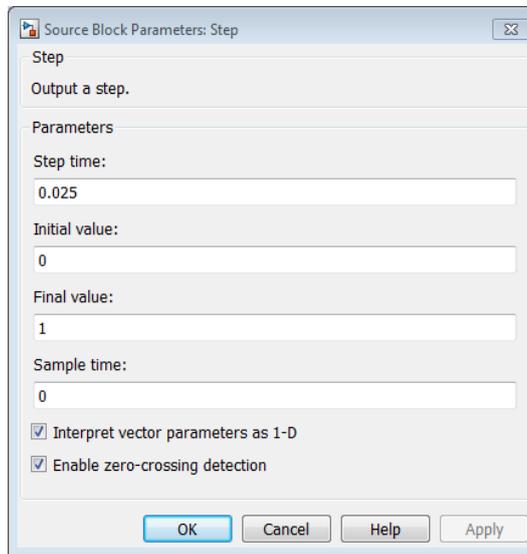


Figura 4. 13. Parámetros Step.

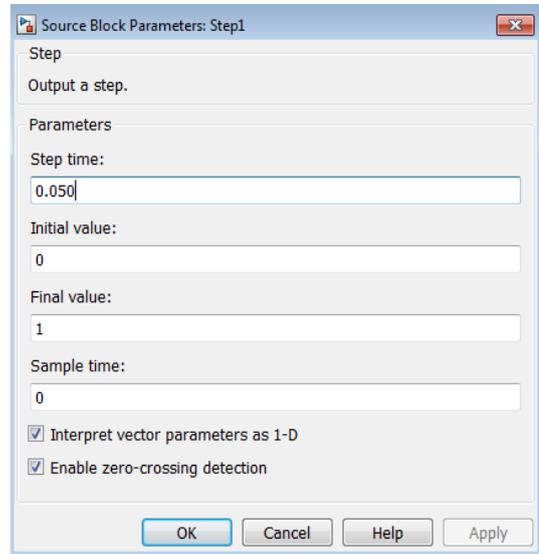


Figura 4. 12. Parámetros Step1.

En el bloque de función de transferencia que es transfer fcn1, también se ingresan parámetros, nótese, figura 4.14, que son los datos de la función en modo de numerador y denominador, en forma matricial que deberán ser escritos en orden descendente, según la forma del polinomio.

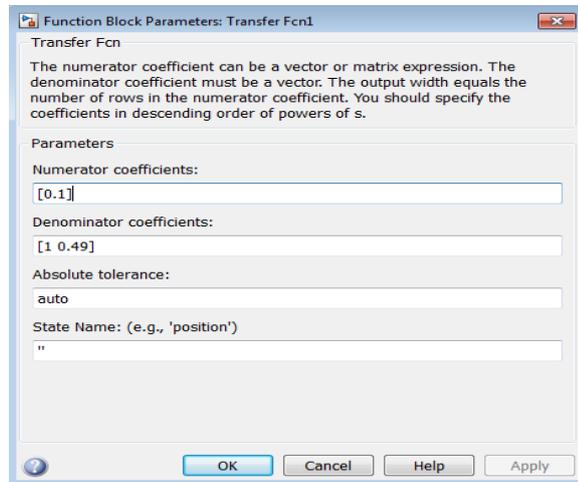


Figura 4. 14. Panel de Transfer Fcn1

Logrando así la figura 4.15 del Script y la figura 4.16 del simulink.



Figura 4. 15. Respuesta del código entrada impulso

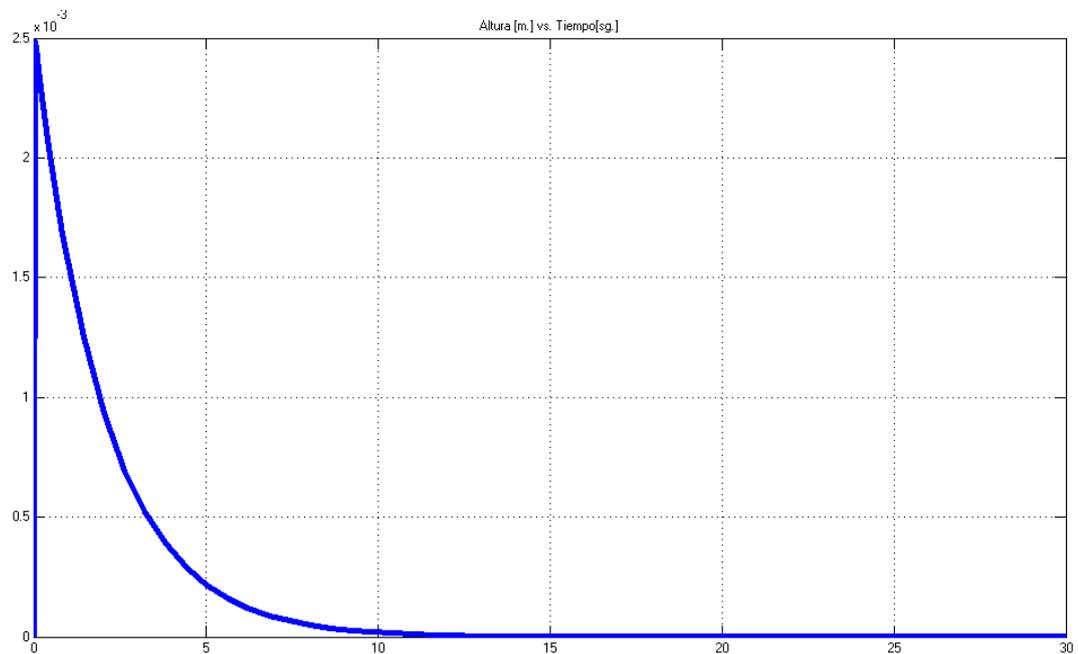


Figura 4. 16. Respuesta en simulink entrada impulso

Rampa.

Para el Script de ésta simulación, se observa que el código será el mismo en cuanto al ingreso de matrices que representan el numerador y el denominador, con la variación de que el tiempo está establecido hasta 30 seg, para así lograr apreciar como el sistema no logra una estabilización ante la señal que se ingresa.

Por consiguiente para el ingreso de la señal rampa, se especifica a la variable u igual al valor que toma el tiempo, en

Matlab, el comando **lsim** es el que representa el tiempo de respuesta de los sistemas lineales continuos o discretos a las entradas arbitrarias.

```
clc,clear
%DENOMINADOR DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
A=[1 0.49];
%NUMERADOR DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
B=[0.1];
% TIEMPO DE SIMULACION
t=[0:0.01:30];
%ENTRADA RAMPA
u=t;
%EVALUACION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
%A LA ENTRADA RAMPA
y=lsim(B,A,u,t);
%GRAFICA Y TITULOS
plot(t,y);
title('Respuesta a una entrada rampa');
xlabel('Tiempo');
grid;
```

Figura 4. 17. Código matlab entrada rampa

En Simulink los bloques funcionales del sistema, son iguales a los que utilizamos en el impulso, a diferencia de la señal de entrada que es la de **Ramp** o Rampa, si se encuentra dentro de las herramientas de Simulink.



Figura 4. 18. Construcción del bloque de transferencia de un tanque.

A la señal de entrada **Ramp**, se le establece los siguientes parámetros, slope igual a uno que es la tasa de relación que lleva de crecimiento la fuente con respecto al tiempo, Start time igual a cero que es el tiempo de donde comienza la fuente, Initial output igual a cero es del valor de donde parte la fuente en el eje de las y, figura 4.19.

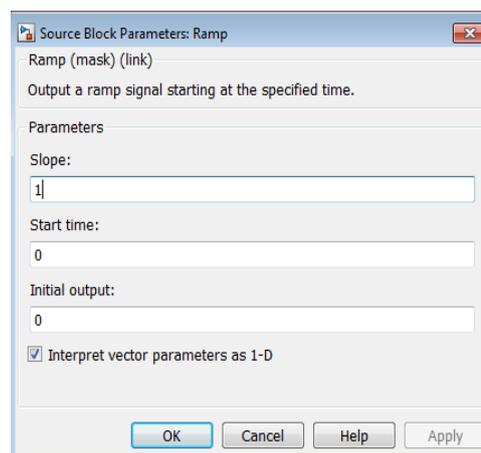


Figura 4. 19. Parámetros rampa

Los resultados del Script y el Simulink se muestran en la figura 4.20 y figura 4.21.

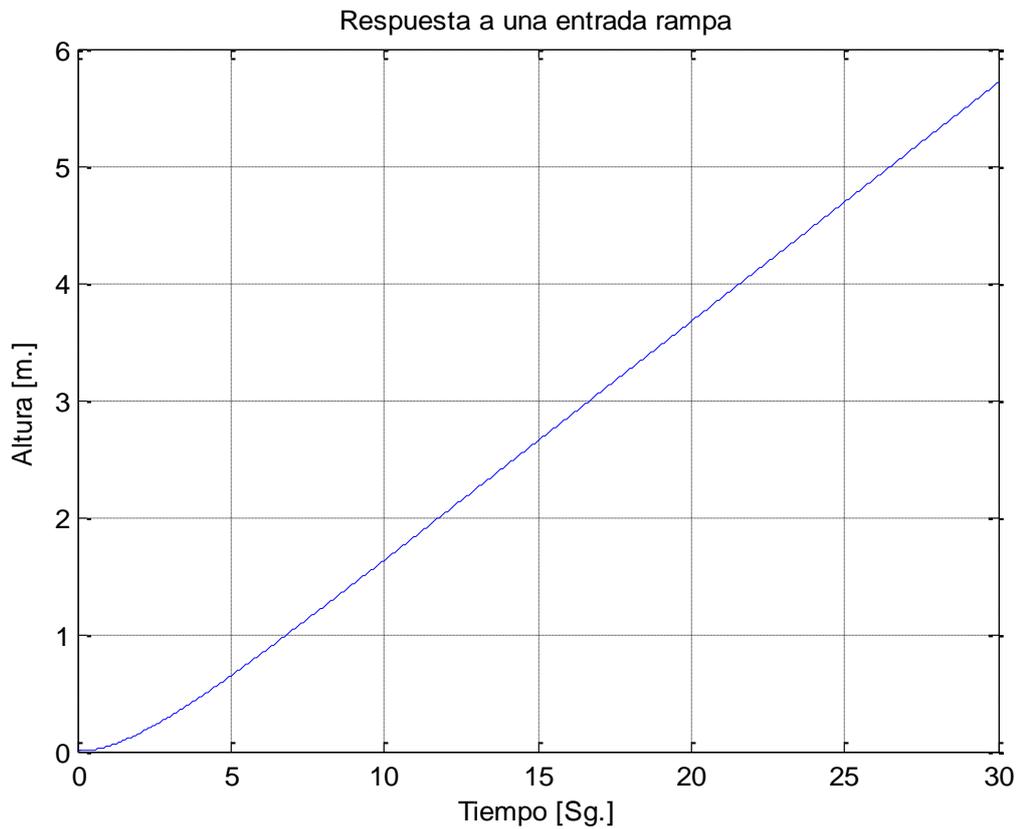


Figura 4. 20. Respuesta del código entrada rampa

Con la visualización de la figura 4.21 se podrá tener una mejor evaluación con respecto a la simulación mediante código y simulink.

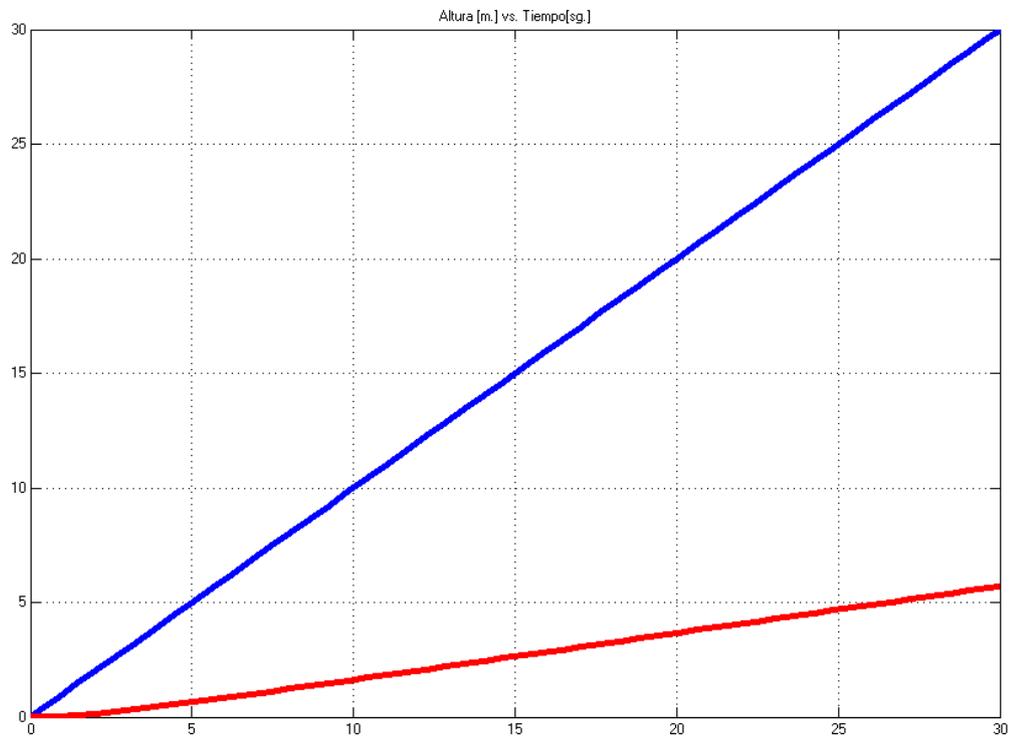


Figura 4. 21. Respuesta en simulink entrada rampa

4.1.2.2. Análisis del sistema de dos tanque en serie con entradas Step, Impulse, Ramp mediante Script y Simulink.

Escalón.

Con lo que respecta la programación para el simulado del sistema de dos tanques, si se analiza detenidamente es evidente que requiere el ingreso de los mismos datos que el de un solo tanque tales como el numerador, denominador expresados en matrices, tiempo de

simulación entre otros con la diferencia de que éstos tomarán otras dimensiones debido a la forma de su función de transferencia.

```

clc,clear
%NUMERADORES DE LA FUNCION DE
TRANSFERENCIA
A=[0.1 0.0981];
C=[0.0491];
%DENOMINADOR DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
B=[1 1.472 0.241];
% TIEMPO DE SIMULACION
t=[0:0.01:50];
%EVALUACION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
%A LA ENTRADA ESCALON
y=step(A,B,t);
z=step(C,B,t);
%GRAFICA Y TITULOS
subplot(211),plot(t,y);
xlabel('Tiempo');ylabel('altura');
title('Respuesta a un escalon unitario');
subplot(212),plot(t,z);
xlabel('Tiempo');ylabel('altura');
xtitle('Tiempo');
grid;

```

Figura 4. 22. Código matlab entrada escalón

Mediante el diagrama de bloques figura 4.25, en Simulink, se obtendrá la respuesta a la entrada escalón unitario en el Scope 2 y Scope 3, del sistema no lineal y lineal respectivamente.

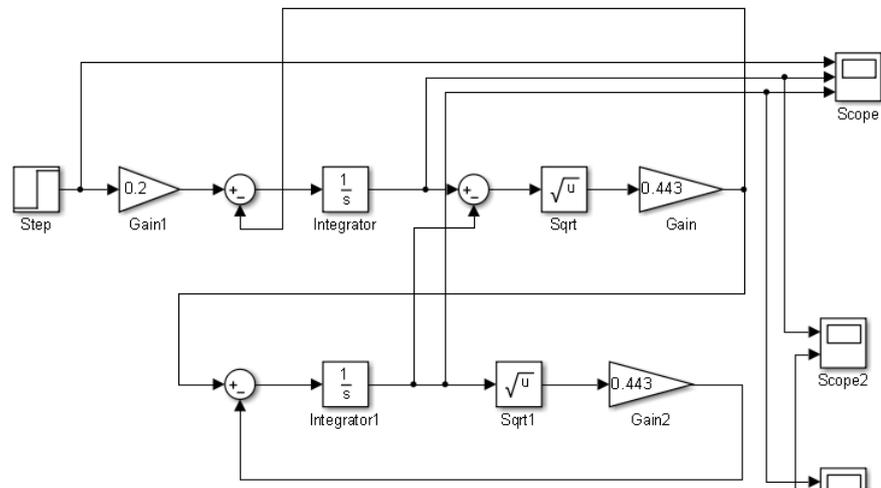


Figura 4. 23. Construcción de bloques de la función no lineal de dos tanques.

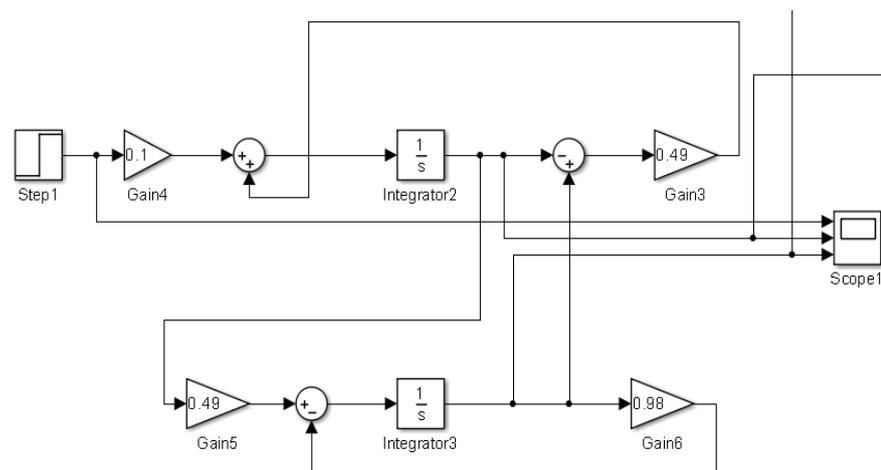


Figura 4. 24. Construcción de bloques de la función lineal de dos tanques

Recordar que la parametrización de la entrada Step es la misma, descrita para el sistema de un tanque.

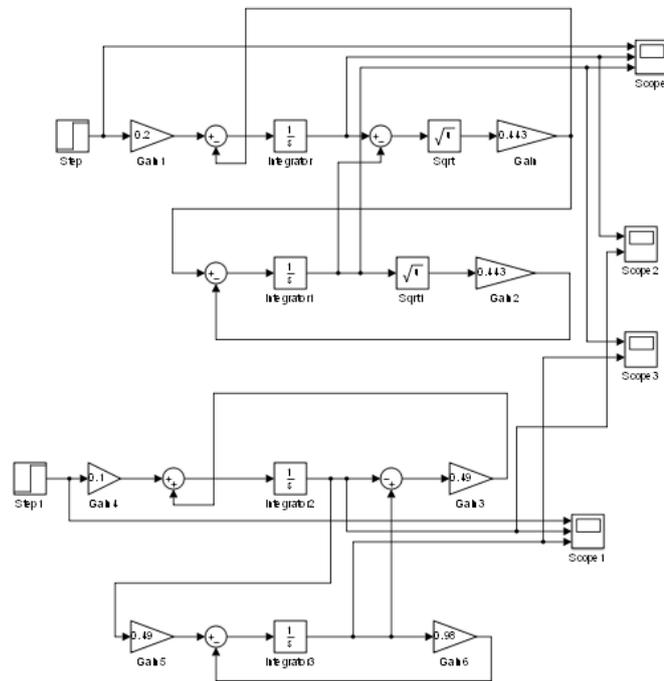


Figura 4. 25. Comparación de sistemas lineales y no lineales.

Logrando sus respectivos resultados de la simulación: figura 4.26 y figura 4.27-28 para la programación y Simulink, mediante las cuales, al finalizar podremos deducir los resultados

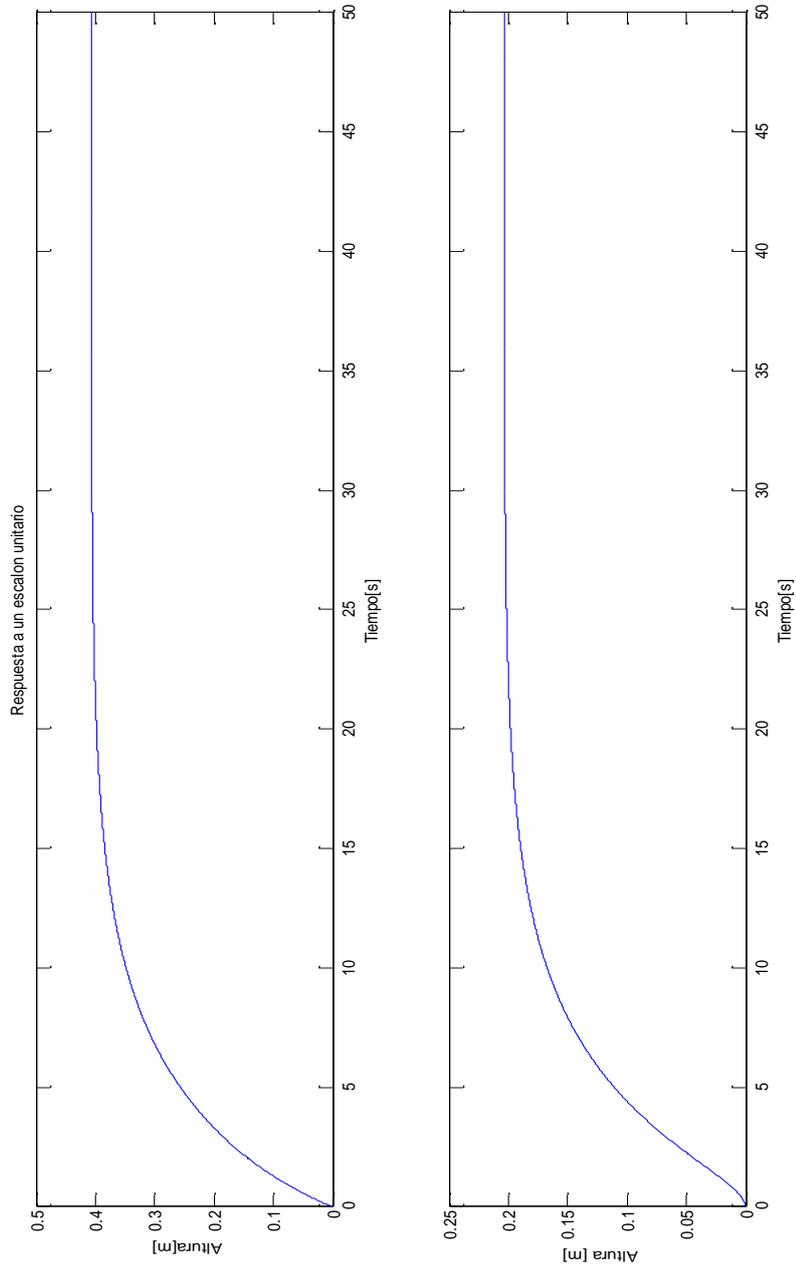


Figura 4. 26. Respuesta del código entrada escalón a) tanque uno b) tanque dos.

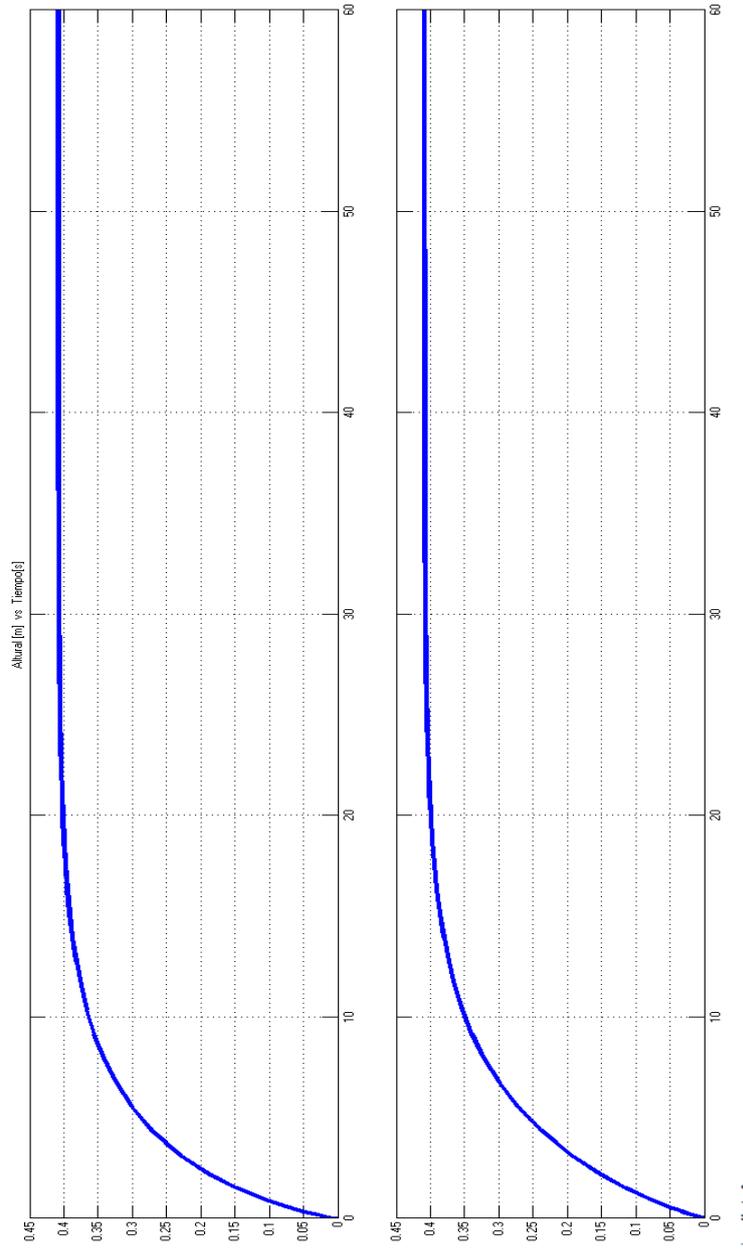


Figura 4. 27. Respuesta en simulink tanque uno a) no lineal b) lineal

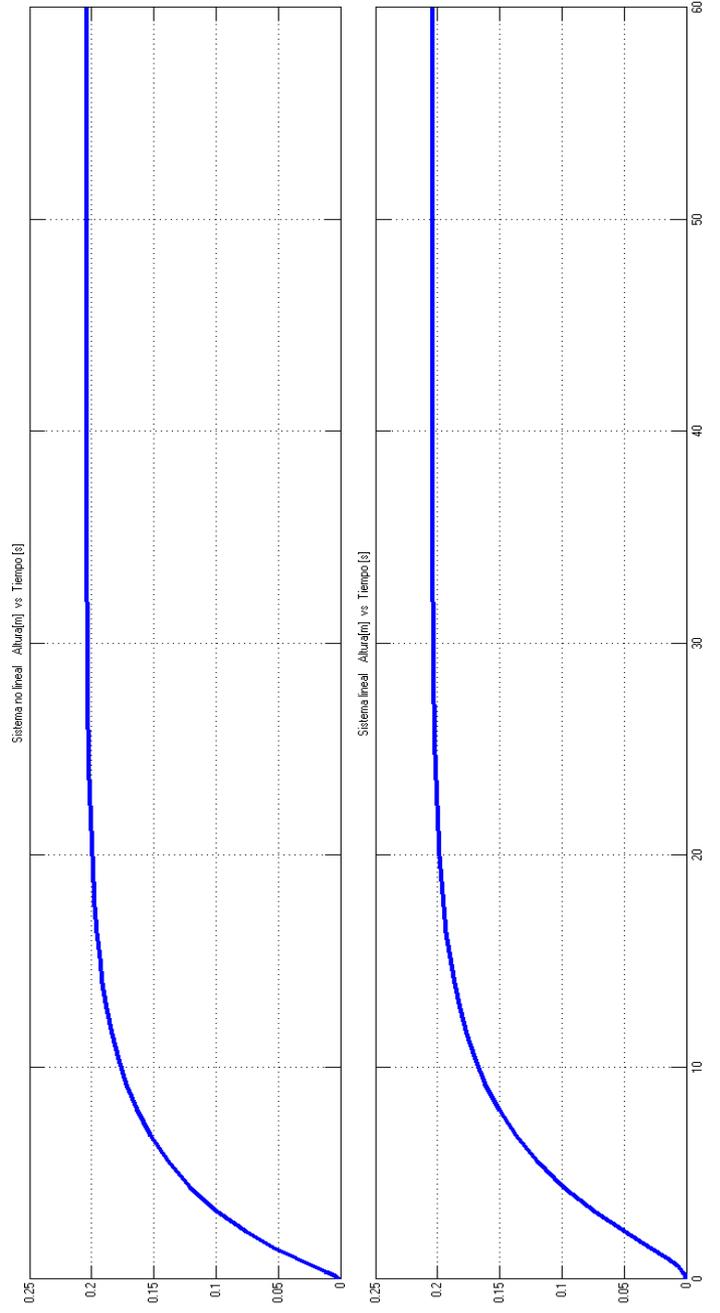


Figura 4. 28. Respuesta en simulink tanque dos a) no lineal b) lineal

Impulso.

De acuerdo con las especificaciones ya descritas anteriormente, el programa se mostrará en la figura 4.29.

```

clc,clear
%NUMERADORES DE LA FUNCION DE
TRANSFERENCIA
A=[0.1 0.0981];
C=[0.0491];
%DENOMINADOR DE LA FUNCION DE
TRANSFERENCIA
B=[1 1.472 0.241];
% TIEMPO DE SIMULACION
t=[0:0.01:50];
%EVALUACION DE LA FUNCION DE
TRANSFERENCIA
%A LA ENTRADA IMPULSO
y=impulse(A,B,t);
z=impulse(C,B,t);
%GRAFICA Y TITULOS
subplot(211),plot(t,y);
xlabel('Tiempo');ylabel('altura');
title('Respuesta a la entrada
impulso');
subplot(212),plot(t,z);
xlabel('Tiempo');ylabel('altura');
xtitle('Tiempo');
grid;

```

Figura 4. 29. Programa del sistema de dos tanques en serie ante una entrada impulso

El diagrama de bloques en Simulink para el tanque 1 y tanque 2 se muestra en la figura 4.30.

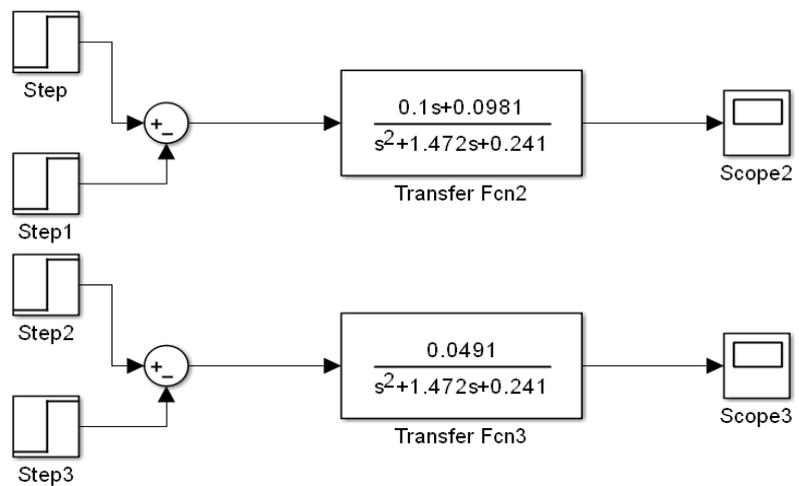


Figura 4. 30. Diseño de función de transferencia a) tanque uno b) tanque dos.

A través de la programación, la respuesta dinámica, que se obtienen se representa en la figura 4.31

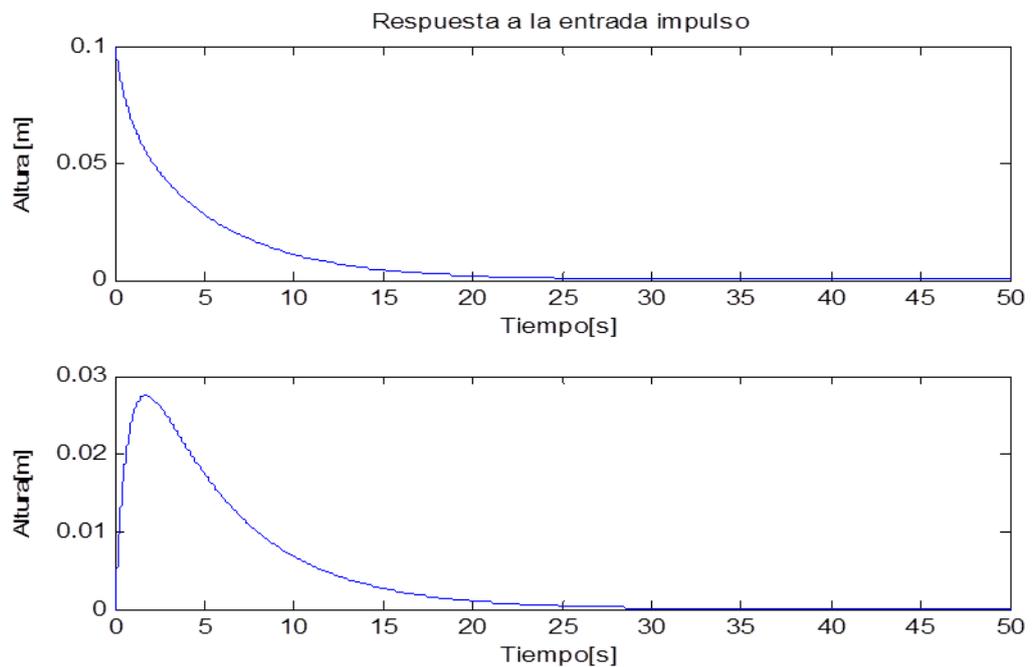


Figura 4. 31. Respuesta del código entrada impulso a) tanque uno b) tanque dos

La simulación y de la construcción de los bloques en simulink de cada uno de los tanques por separado se muestran en la figura 4.32 y 4.33

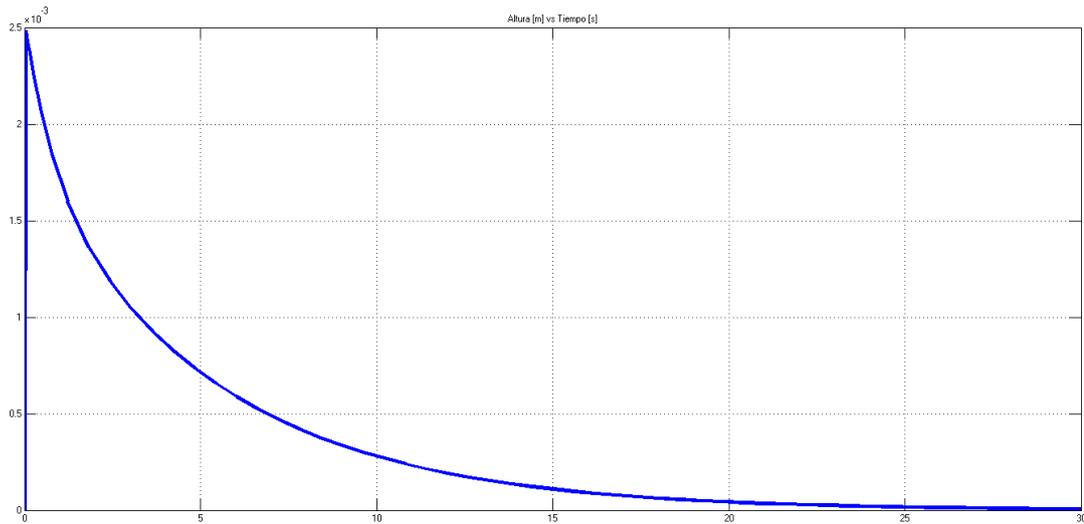


Figura 4. 32 Respuesta en simulink del tanque uno

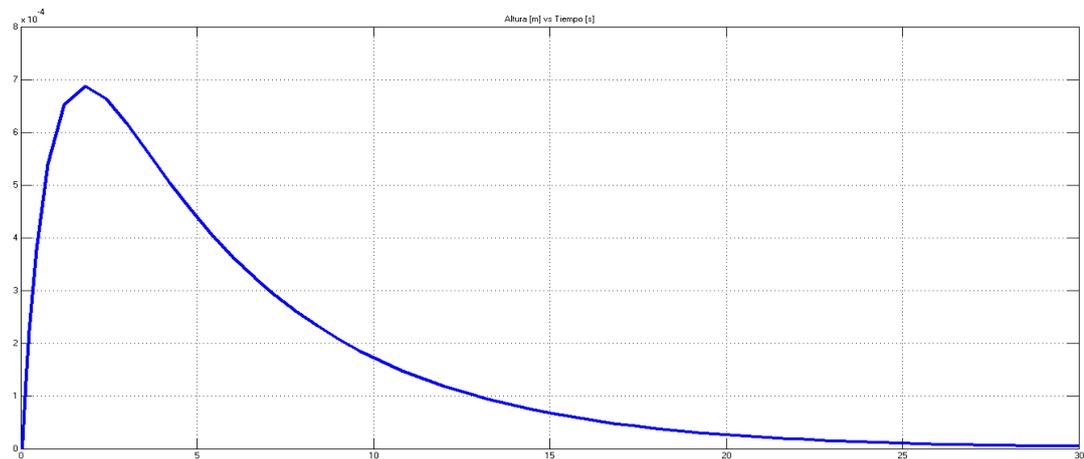


Figura 4. 33. Respuesta en simulink del tanque uno

Rampa

El código en Matlab del sistema ante la entrada rampa es similar a los ya expuestos en los anteriores índices, es decir, para el ingreso de la señal rampa, se especifica a la variable **y** igual al valor que toma el tiempo, en Matlab, el comando **lsim** es el que representa el tiempo de respuesta de los sistemas lineales continuos o discretos a las entradas arbitrarias

```

clc,clear
%NUMERADORES DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
A=[0.1 0.0981];
C=[0.0491];
%DENOMINADOR DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
B=[1 1.472 0.241];
% TIEMPO DE SIMULACION
t=[0:0.01:50];
%ENTRADA RAMPA
u=t;
%EVALUACION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA
%A LA ENTRADA RAMPA
y=lsim(A,B,u,t);
z=lsim(C,B,u,t);
%GRAFICA Y TITULOS
subplot(211),plot(t,y);
xlabel('Tiempo');ylabel('altura');
title('Respuesta a la entrada rampa unitaria');
subplot(212),plot(t,z);
xlabel('Tiempo');ylabel('altura');
xtitle('Tiempo');
grid;

```

Figura 4. 34. Código matlab entrada rampa

En Simulink los bloques funcionales del sistema, son iguales a los que utilizamos en el impulso, a diferencia de la señal de entrada que es la de **Ramp** o Rampa, si se encuentra dentro de las herramientas de Simulink.

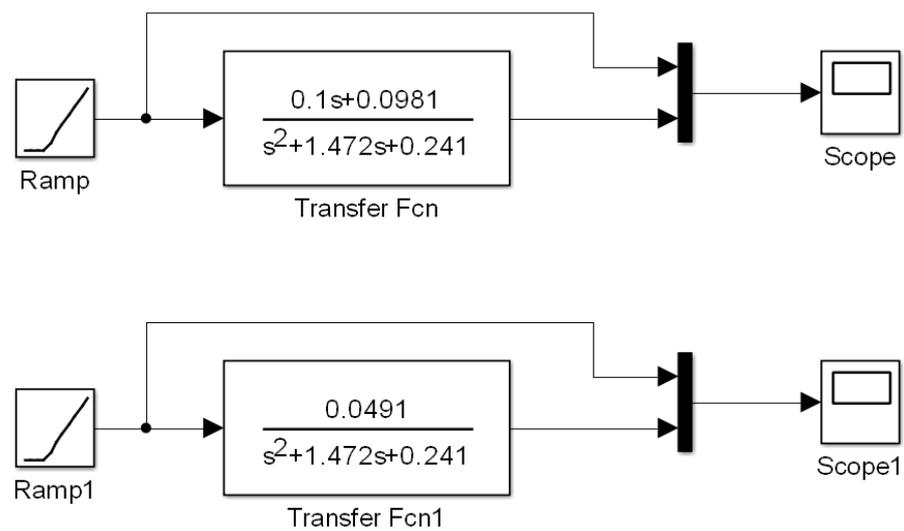


Figura 4. 35. Construcción de funciones de transferencia a) tanque uno b) tanque dos.

La respuesta de las simulaciones mediante código de matlab se expone para cada tanque figura 4.36.

Mientras que la respuesta del sistema mediante simulink se aprecia en la figura 4.37.

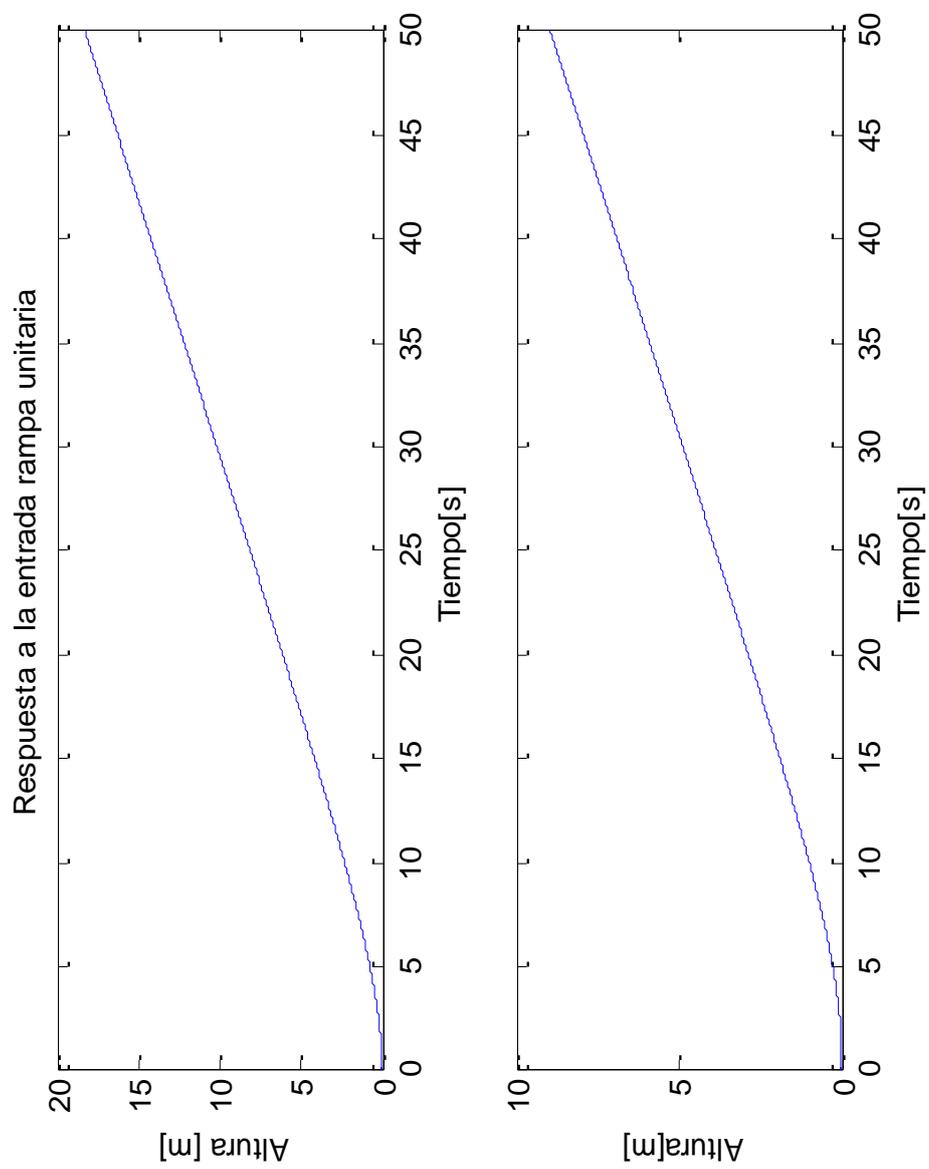


Figura 4. 36. Respuesta código a) tanque uno b) tanque dos.

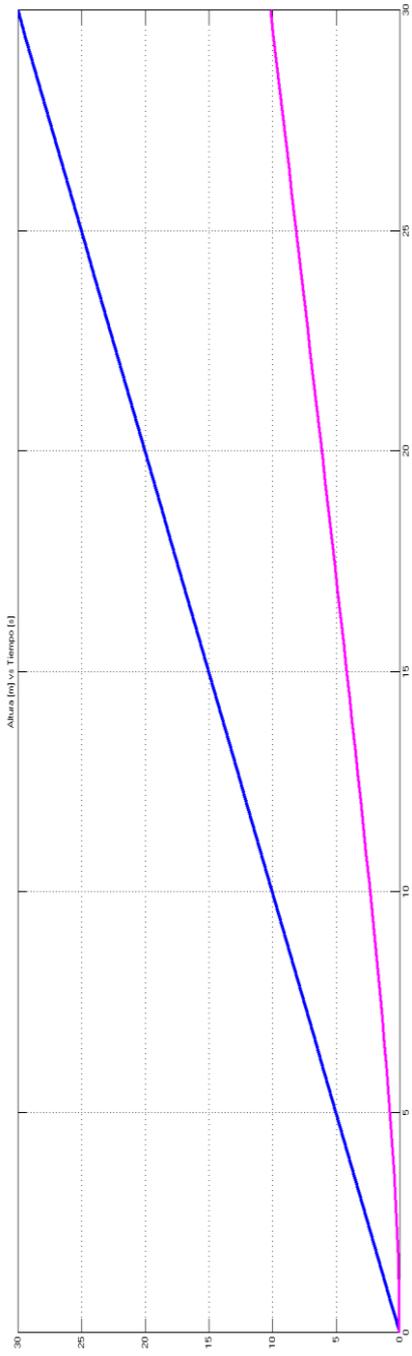


Figura 4. 38. Respuesta en simulink tanque uno.

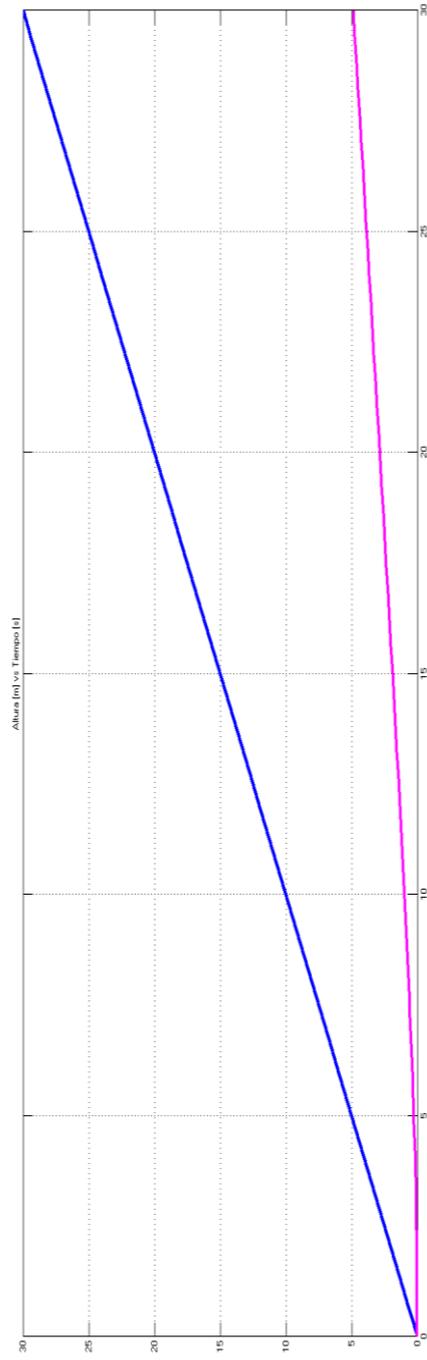


Figura 4. 37. Respuesta en simulink tanque dos

4.2. Scilab.

Es un programa desarrollado por INRIA, Institut National de Recherche en Informatique et Automatique, instituto francés de investigación, y ENPC, Ecole Nationale de Ponts et Chaussées, una escuela de ingenieros. Está compuesto en tres partes, un intérprete, librerías de funciones y librerías con rutinas en Fortran y C, es un software de libre uso, por lo que se puede tener acceso a su código fuente y el usuario puede mejorarlo o adaptarlo a sus necesidades.

Es un lenguaje de programación de alto nivel para cálculos numéricos, a las operaciones matriciales y científicos, de ingeniería, para aplicaciones de control de sistemas y procesamiento de señales, herramienta poderosa para el análisis de sistemas no lineales, por lo que posee entre sus características un entorno interactivo para la modelación y simulación de éstos, conocido como Xcos, además puede ampliar sus funciones mediante herramientas o toolboxes.

4.2.1. Por qué usar Scilab?

Es un sustituto de software libre para Matlab, tiene las mismas funcionalidades pero diferentes modelos de instrucción que Matlab

Sirve para diversos sistemas operativos (disponible para diferentes plataformas)

4.2.2. Desarrollo de la herramienta de Simulación.

Para entender mejor la dinámica del sistema se va a construir modelos, utilizando Xcos así como la programación de Scilab mediante comandos. Se realizará varios modelos del mismo sistema, para ejecutarlos y así poder comparar como responde a diferentes tipos de entrada.

Al igual que Matlab, se conocerán algunos bloques de Xcos y del Editor de Scilab.

En la figura 4.39 se muestra la librería para Xcos un poco parecida a la de Matlab, al igual que el área de trabajo, figura 4.40.

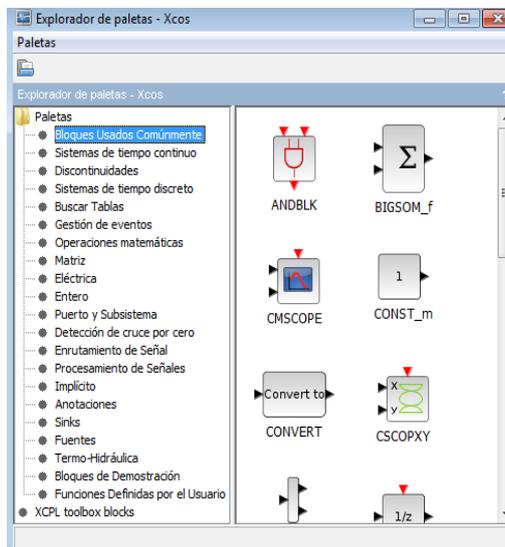


Figura 4. 40. Librerías Xcos

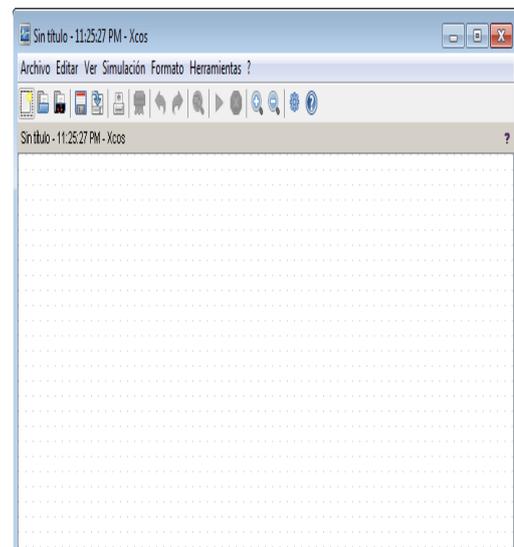
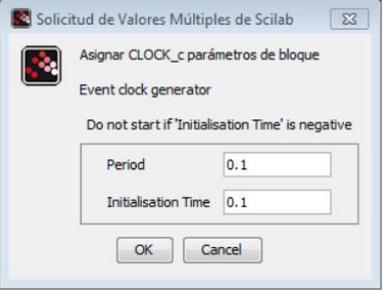
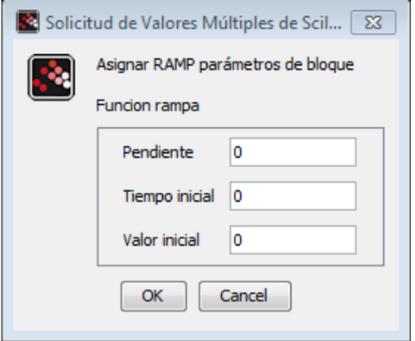


Figura 4. 39. Área de trabajo Xcos.

-Librerías de Xcos.

	<p>El bloque Activation clock, la única salida de este bloque es generar un muestreo que están programadas por el período de los parámetros en cuestión de segundos. La fecha de inicio de la generación de eventos se puede configurar en cuestión de segundos con el parámetro de tiempo de inicialización</p>  <p>Figura 22 Activation clock</p>
	<p>El bloque de rampa genera una señal que se inicia en un tiempo especificado y el valor inicial y se incrementa en una tasa especificada (parámetro Slope)</p>  <p>Figura 23 Ramp</p>

	<p>Bloque Step de salida da una señal de paso entre dos niveles definidos por el valor inicial y el valor final a partir de un paso de tiempo especificado</p>
	<p>Este bloque Summation, realiza la suma o resta de sus entradas escalares o vectoriales o matrices. El tipo de datos de entrada se ajusta con el parámetro de tipo de datos.</p>
	<p>Este bloque Integral_f, es un integrador. La salida es la integral de la entrada</p>
	<p>Este bloque calcula la raíz cuadrada de cada elemento de la matriz de entrada. Soporta los tipos de datos dobles y complejos (parámetro Tipo de datos).</p>
	<p>Este bloque puede ser usado para fijar el tiempo final de la simulación. Cuando ese bloque es parametrizada verdaderamente entonces el simulador saltará al 'tiempo de integración final "se define en el ítem Configuración del menú de simulación del tiempo</p>

	<p>definido por el parámetro " tiempo de simulación final" del cuadro de diálogo. Que el parámetro puede ser un valor numérico o una variable simbólica definida en el contexto Scicos.</p> <p>Tenga en cuenta que el elemento 'Final simulación en tiempo' (de la configuración del diagrama) siempre terminan la simulación a la hora especificada. Este bloque debe configurarse para poner fin a la simulación antes de este ajuste</p>
--	---

-Comandos de Editor.

Poly	Ayuda a definir un polinomio de cualquier variable.
Syslin	Define un sistema lineal como una lista y comprueba la consistencia de los datos
Csim	Simula un sistema lineal siendo un sistema de tiempo continuo representado por una lista syslin.
Plot	Gráfica datos obtenidos y almacenados por una variable, en un plano cartesiano.
Step,Impulse.	Señales ya conocidas, establecidas en el editor.
Deff	Se utiliza para definir funciones a partir de secuencias de instrucciones escritas en cadenas de texto

4.2.2.1. Análisis del sistema de un solo tanque con entradas Step, Impulse, Ramp mediante Script y Xcos.

Escalón.

Al ejecutar Scilab, podemos abrir el editor de notas conocido como Scinotes donde podemos ingresar nuestros comandos y formar nuestro programa que representará el modelado del sistema y así simularlo.

```
//Programa que muestra la respuesta del sistema de un solo tanque
//ante una entrada escalón unitario//
s=poly(0,'s');.....//definición de polinomios con el símbolo "s".
t=0:0.01:30;           //vector de tiempos para la simulación
gp=0.1/(s+0.49);      //Escritura de la función de transferencia del Sistema
sist=syslin('c',gp);.....//se define un sistema lineal como una lista y comprueba la consistencia de los datos.
yp=csim('step',t,sist); //simula el tiempo de respuesta del sistema lineal
plot(t,yp);           //Gráfico de la simulación
```

Figura 4. 41. Código scilab entrada escalón

La construcción de los bloques en el editor gráfico conocido como Xcos se presenta en la figura 4.42.

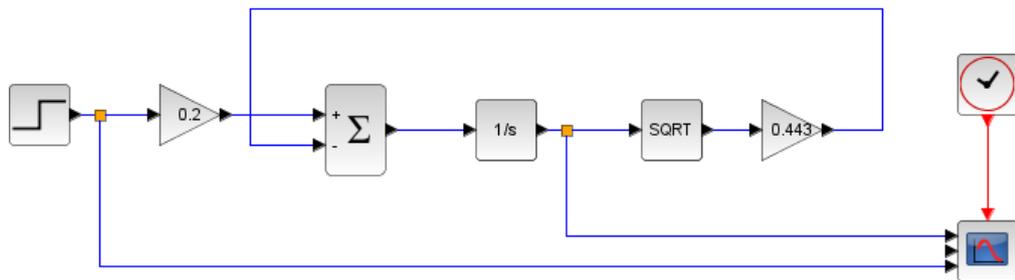


Figura 4. 42. Desarrollo de la ecuación no lineal de un tanque.

Para poder apreciar la diferenciación se tienen el diagrama de bloques de la función lineal y no lineal para el tanque uno figura 4.42 y 4.43, respectivamente.

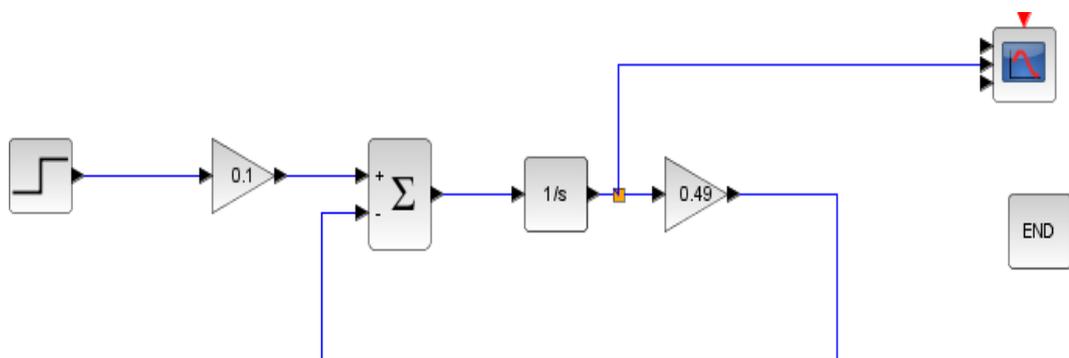


Figura 4. 43. Desarrollo de la ecuación lineal

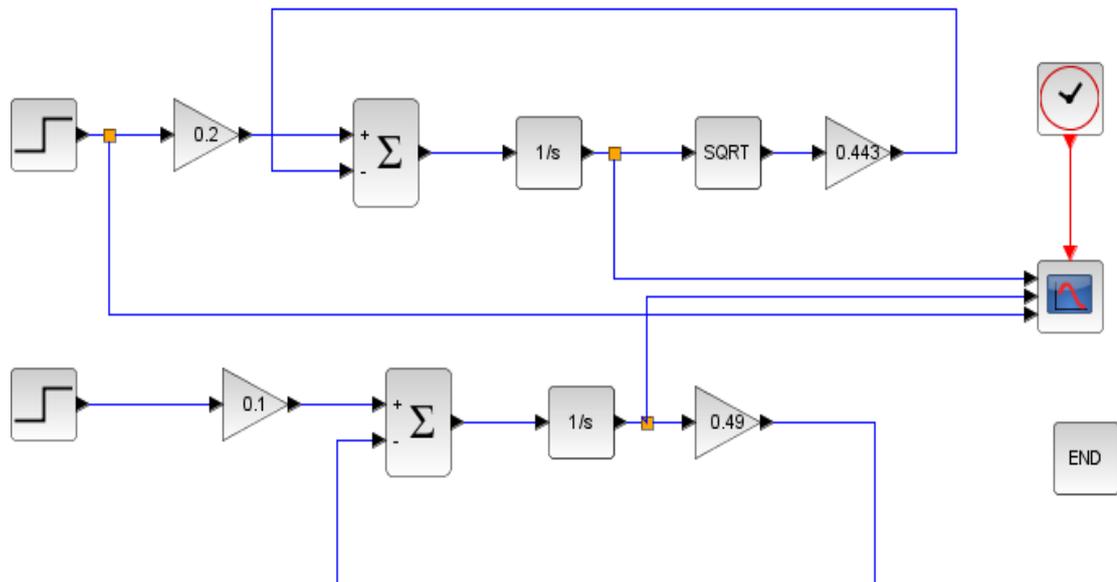


Figura 4. 44. Desarrollo de las ecuaciones para la comparación a) no lineal
b)lineal

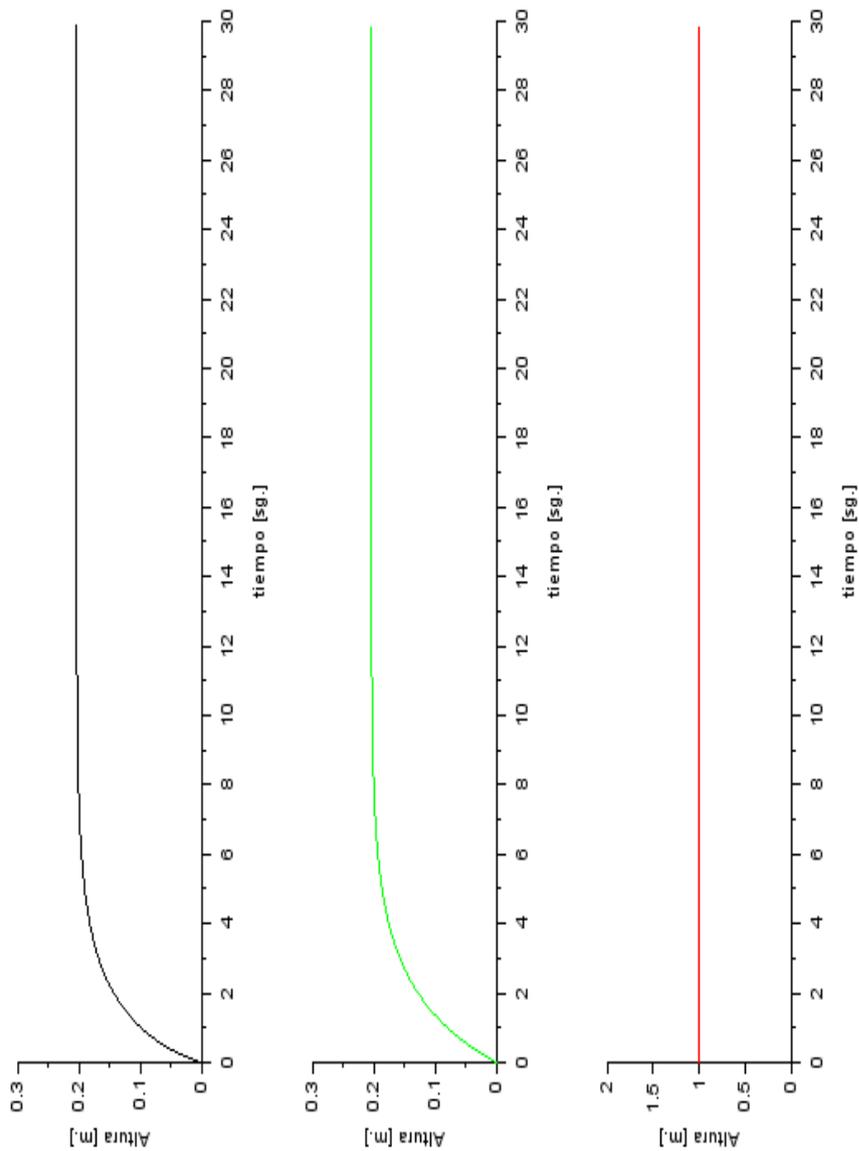


Figura 4. 45. Escalón-editor un tanque a) no lineal b) lineal c) escalón.

Impulso

En la figura 4.46 presenta el código en scilab del comportamiento a la entrada impulso y en la figura 4.47 la construcción en Xcos.

```
//Programa que muestra la respuesta del sistema de un solo
tanque ante una entrada impulso//

s=poly(0,'s'); //definición de polinomios con el símbolo s
t=0:0.01:30; //vector de tiempos para la simulación
gp=0.1/(s+0.49); //ingreso de la función de transferencia del
Sistema
sist=syslin('c',gp); //se define un sistema lineal
yp=csim('impulse',t,sist); //simula el tiempo de respuesta del
sistema ante la entrada impulso
plot(t,yp); //Gráfico de la simulación
```

Figura 4. 46. Código scilab entrada impulso

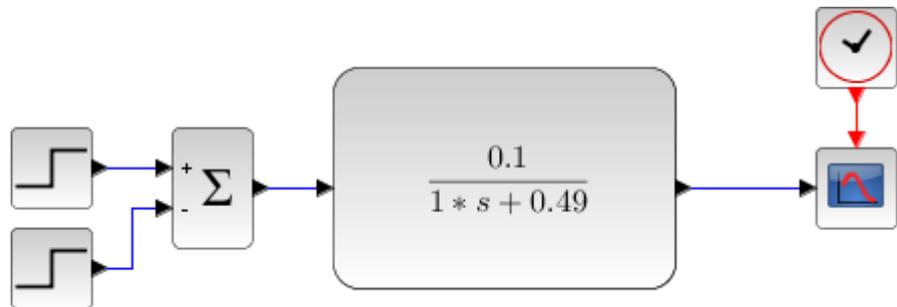


Figura 4. 47. Impulso-Xcos desarrollo de función de transferencia un tanque.

Obteniendo las respuestas en las figuras 4.48 y 4.49.

-Respuestas Dinámicas.

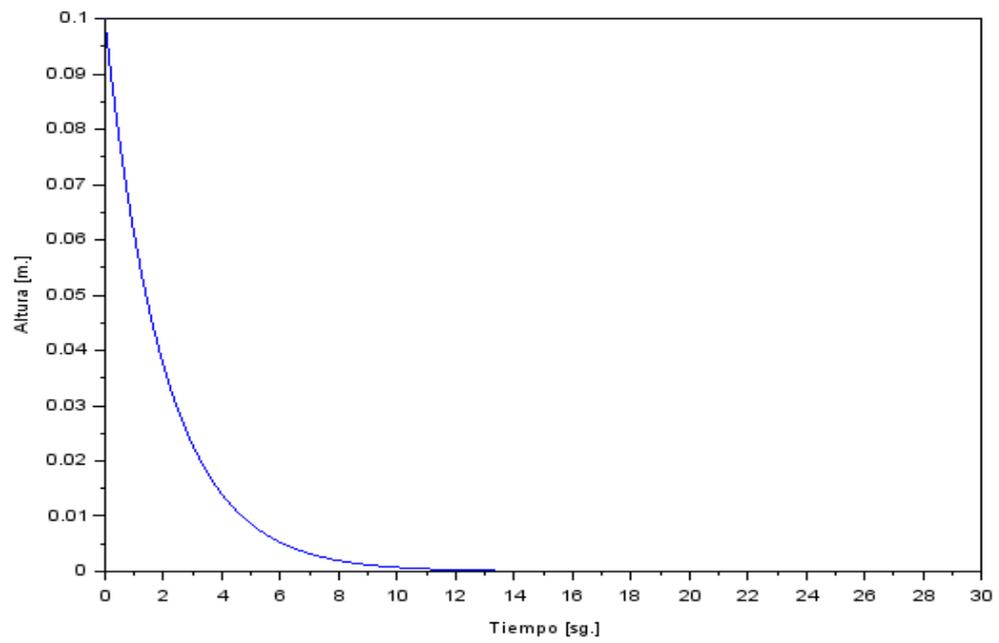


Figura 4. 48. Impulso-editor un tanque

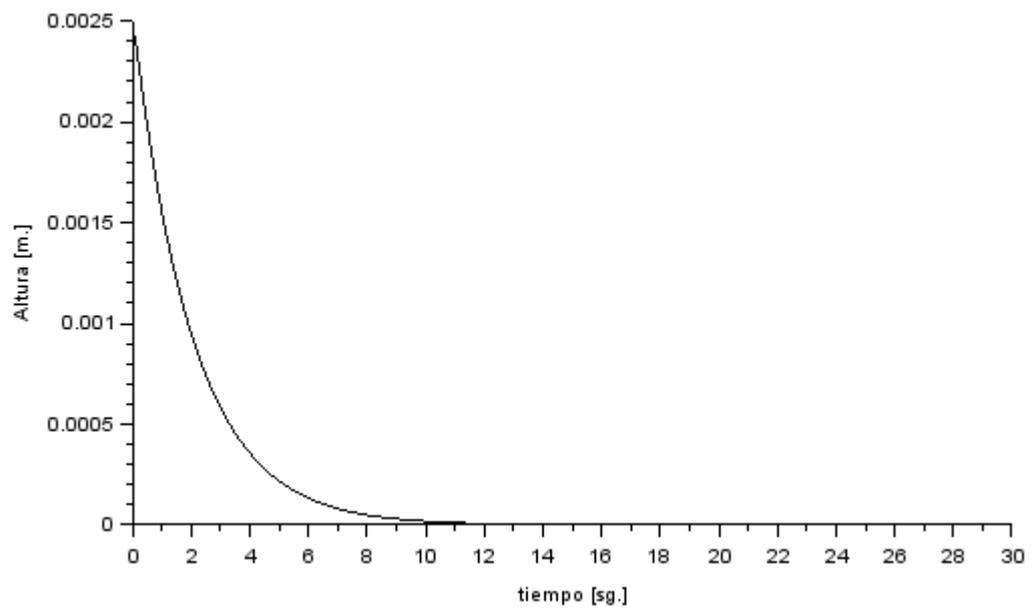


Figura 4. 49. Impulso-Xcos un tanque.

Rampa.

En la figura 4.50 presenta el código en scilab del comportamiento a la entrada rampa y en la figura 4.51 la construcción en Xcos.

```
//Programa que muestra la respuesta del sistema de un solo
tanque ante una entrada rampa//
s=poly(0,'s'); //definición de polinomios con el símbolo
s
t=0:0.01:30; //vector de tiempos para la simulación
gp=0.1/(s+0.49); //ingreso de la función de transferencia
del Sistema
sist=syslin('c',gp); //se define un sistema lineal
//input defined by a time function
deff('u=timefun(t)','u=t')// entrada definida por una función
del tiempo
yp=csim(timefun,t,sist); //simula el tiempo de repuesta del
sistema ante la entrada impulse
plot(t,yp); //Gráfico de la simulación
```

Figura 4. 50. Código scilab entrada rampa

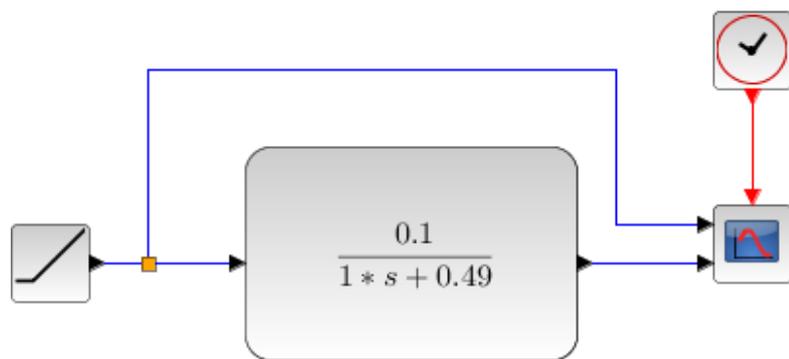


Figura 4. 51. Rampa-Xcos desarrollo de la función de transferencia un tanque.

Obteniendo así las respuestas del Editor figura 4.52 y Xcos figura 4.53.

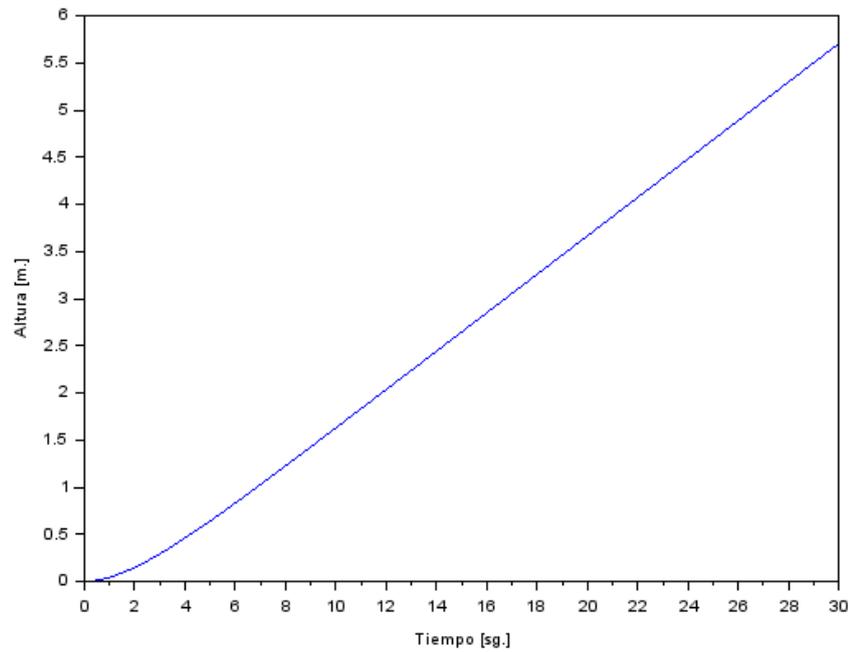


Figura 4. 52 Rampa-editor un tanque.

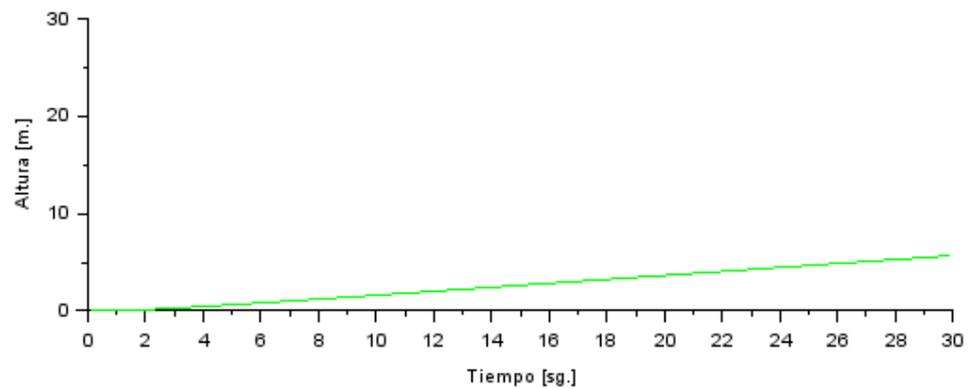


Figura 4. 53 Rampa-Xcos un tanque.

4.2.2.2. Análisis del sistema de dos tanques en serie con entradas Step, Impulse, Ramp mediante Editor y Xcos.

Escalón.

En la figura 4.54 y 4.55 se muestra como desarrollar una simulación de dos tanques, en dos formas ya conocidas.

```

s=poly(0,'s');           //definición de polinomios con el
                          //símbolo "s".
t=0:0.01:30;           //vector de tiempos para la simulación
gp=(0.1*s+0.0981)/(s^2+1.472*s+0.241); //Escritura de la
                          //función de transferencia del Sistema
gp1=0.0491/(s^2+1.472*s+0.241); //Escritura de la función
                          //de transferencia del Sistema
sist=syslin('c',gp);    // se define el primer sistema lineal
sist1=syslin('c',gp1); //se establece el segundo sistema
                          //lineal
yp=csim('step',t,sist); //simula el tiempo de respuesta de sist
yp1=csim('step',t,sist1); //simula el tiempo de respuesta de
                          //sist1
plot(t,yp);             //Gráfico de la simulación
plot(t,yp1);

```

Figura 4. 54 Código scilab entrada escalón.

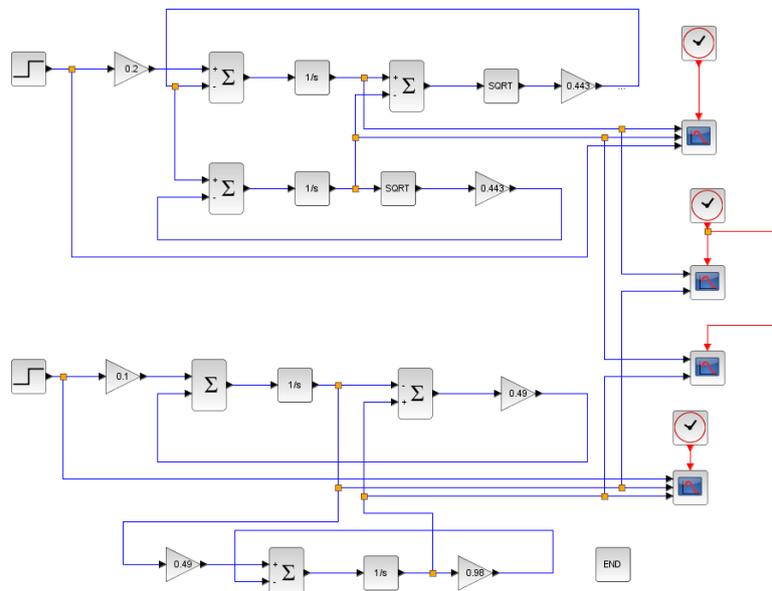


Figura 4. 55 Desarrollo de las ecuaciones de dos tanques
a) no lineales b) lineales.

Obteniendo así las respuestas del Editor figura 4.56 y Xcos figura 4.57 y 4.58.

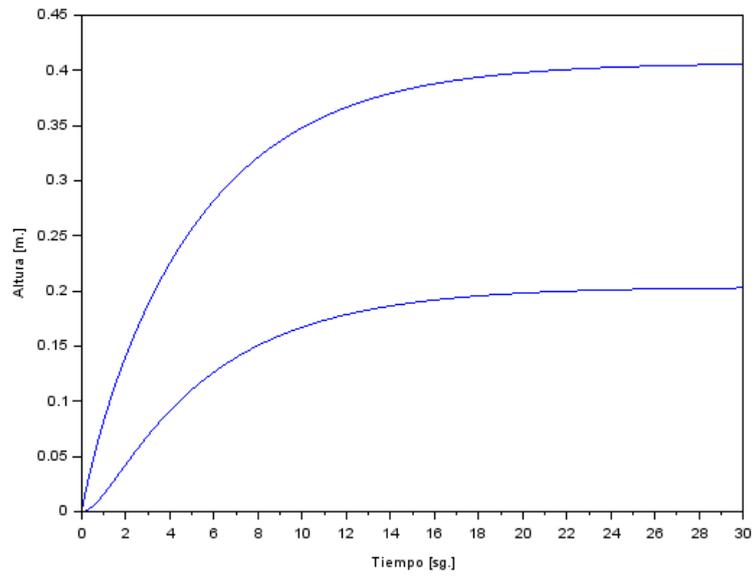


Figura 4. 56 Escalón-editor dos tanques.

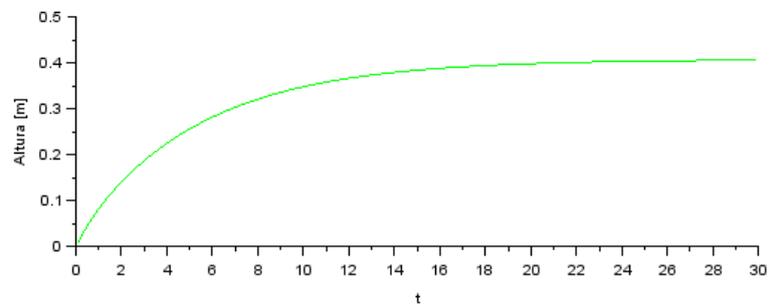
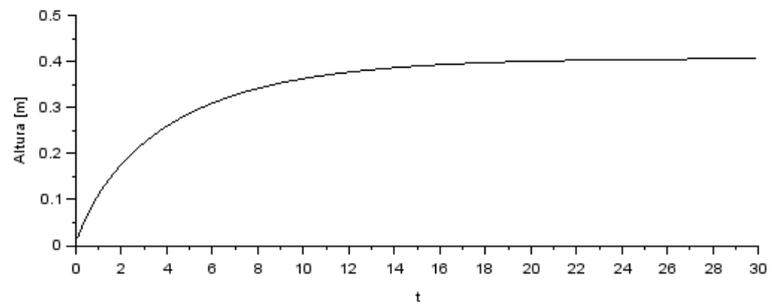


Figura 4. 57 Escalón-Xcos tanque uno.

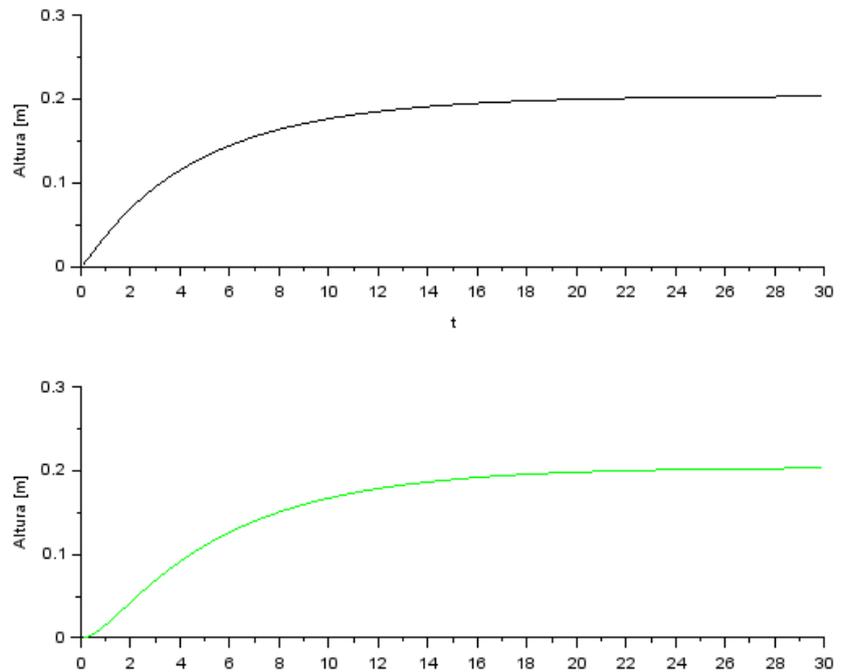


Figura 4. 58 Escalón-Xcos tanque dos.

Impulso.

En la figura 4.59 y 4.60 se muestra como desarrollar una simulación de dos tanques, en dos formas ya conocidas.

```
s= s=poly(0,'s');
t=0:0.01:30;           //vector de tiempos para la simulación
gp=(0.1*s+0.0981)/(s^2+1.472*s+0.241); //Sistema
gp1=0.0491/(s^2+1.472*s+0.241);
sist=syslin('c',gp);
sist1=syslin('c',gp1);
yp=csim('impulse',t,sist);
yp1=csim('impulse',t,sist1);
subplot(221)
plot(t,yp);           //Gráfico de la simulación
xtitle("tanque 1")
subplot(222)
plot(t,yp1);
xtitle("tanque 2")
```

Figura 4. 59 Código scilab entrada impulso.

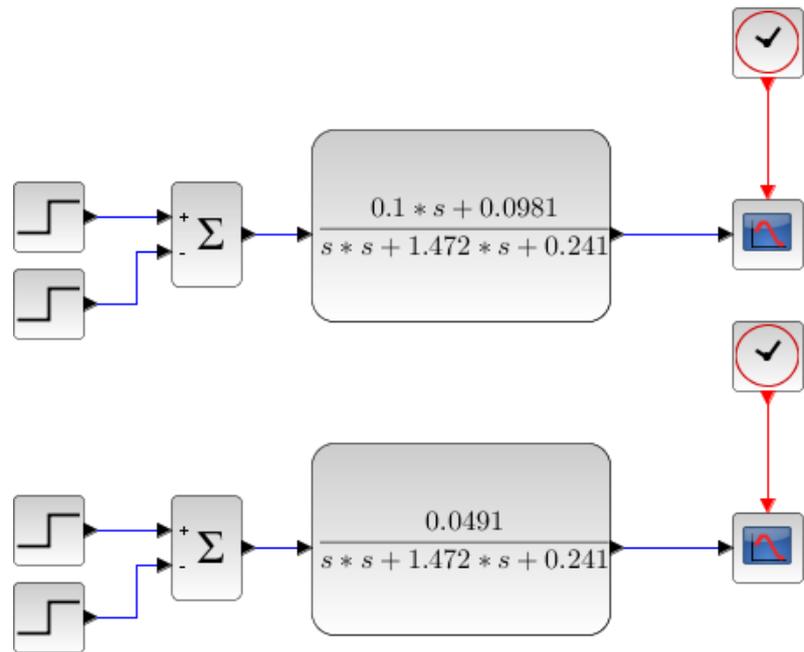


Figura 4. 60 Impulso-Xcos f. transferencia dos tanques a) tanque uno b) tanque dos.

Obteniendo así las respuestas del Editor figura 4.61 y

Xcos figura 4.62 y 4.63.

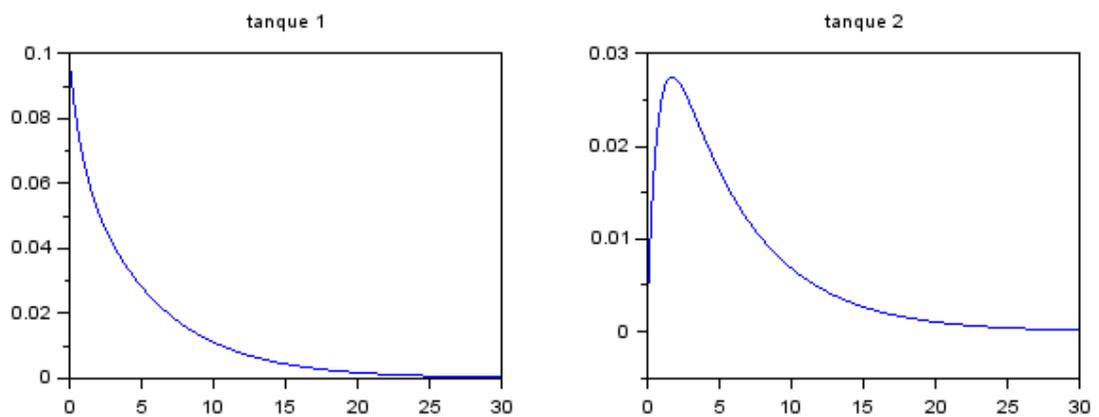


Figura 4. 61 Impulso-Editor dos tanques a) tanque uno b)tanque dos.

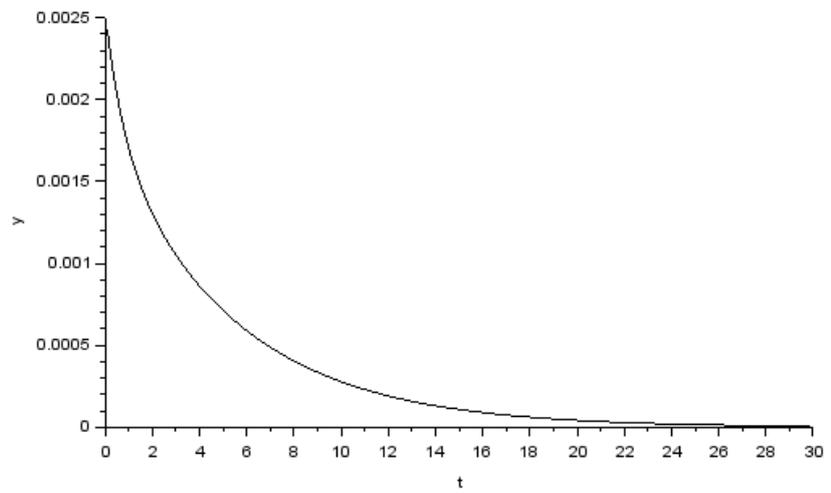


Figura 4. 62 Impulso-Xcos dos tanques – tanque uno

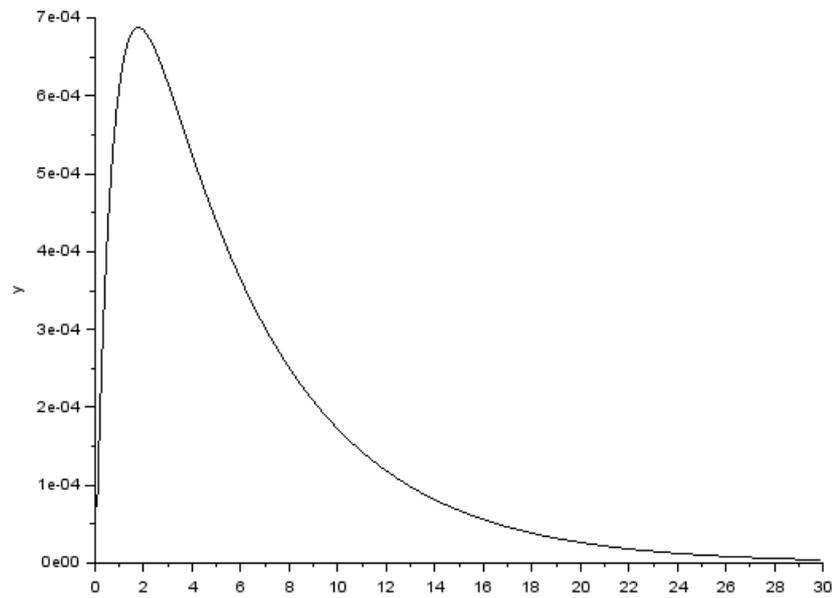


Figura 4. 63 Impulso-Xcos dos tanques – tanque dos.

Rampa.

En la figura 4.59 y 4.60 se muestra como desarrollar una simulación de dos tanques, en dos formas ya conocidas

```
s=poly(0,'s');
t=0:0.01:30;           //vector de tiempos para la simulación
gp=(0.1*s+0.0981)/(s^2+1.472*s+0.241); //Sistema
gp1=0.0491/(s^2+1.472*s+0.241);
sist=syslin('c',gp);
sist1=syslin('c',gp1);
//input defined by a time function
deff('u=timefun(t)','u=t')
yp=csim(timefun,t,sist);
yp1=csim(timefun,t,sist1);
subplot(221)
plot(t,yp);           //Gráfico de la simulación
xtitle("tanque 1")
subplot(222)
plot(t,yp1);
xtitle("tanque 2")
```

Figura 4. 64 Código scilab entrada rampa.

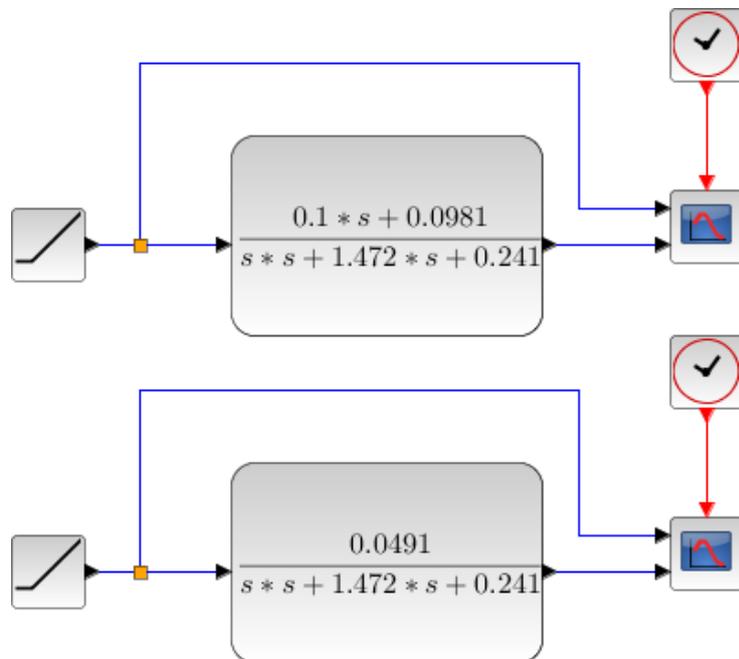


Figura 4. 65 Desarrollo Xcos f. transferencia dos tanques rampa.

Obteniendo así las respuestas del Editor figura 4.66 y

Xcos figura 4.67 y 4.68.

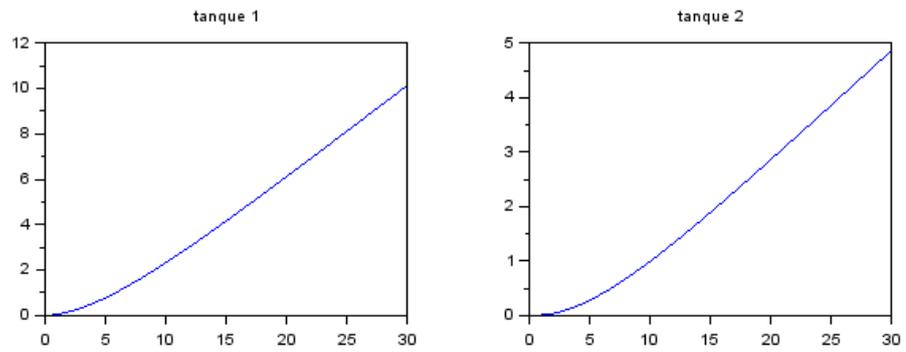


Figura 4. 66 Rampa-editor dos tanques a)tanque uno b)tanque dos.

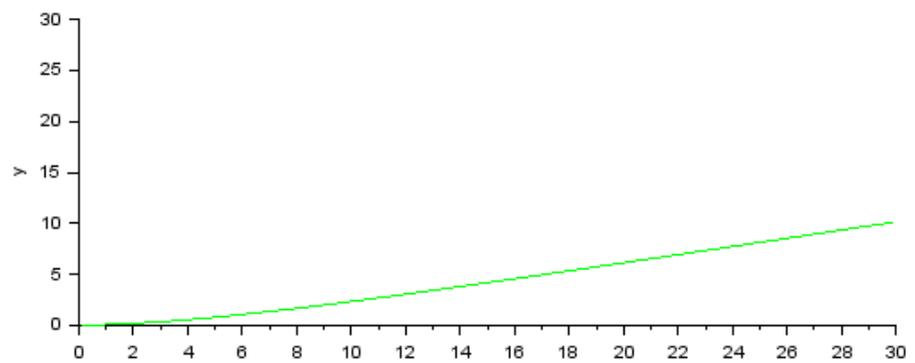


Figura 4. 67 Xcos- rampa tanque uno.

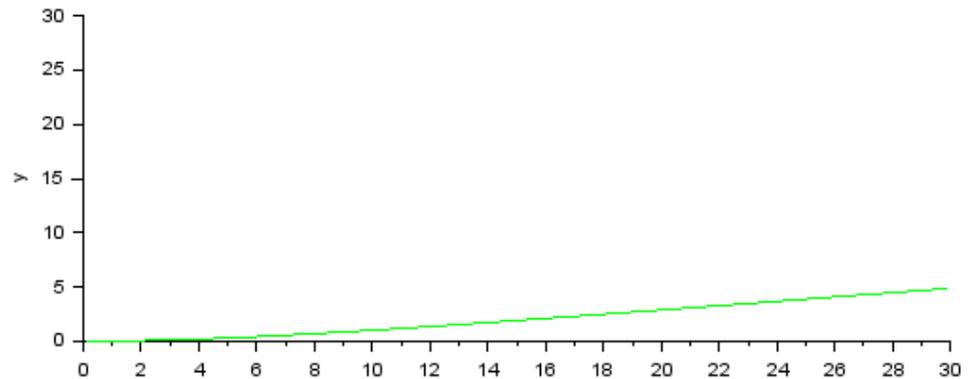


Figura 4. 68 Rampa-Xcos dos tanques – tanque dos.

4.3. Modelica.

Modelica; creado y desarrollado en Suecia por la universidad de Linköping, es un software de código abierto, basado en programación orientada a objetos, que permite combinar sistemas de diferente dominio (eléctrico, mecánico entre otros) y a su vez modelar. Los procesos obtenidos mediante ecuaciones algebraicas, diferenciales y discretas son aquellas que se pueden simular.

Todos los programas hechos para simular necesitan de un compilador, Modelica posee tres compiladores: Dymola, Mathmodelica y Openmodelica.

Openmodelica es de gran ayuda para sistemas dinámicos en la ingeniería, en la ayuda de simulaciones para ecuaciones complejas, siendo un software libre.

4.3.1. Por qué usar Openmodelica?

La mayoría de los softwares, para simulación de modelos; no son de acceso libre y de altos costos. En un mundo siempre de innovación se requiere softwares que ayuden a simular la realidad de los objetos y openmodelica es una herramienta de gran ayuda para cuando se requiere combinar procesos.

Su lenguaje siendo muy discutido por los usuarios, parecido al c++ o java, pero con ciertos componentes que ayudan muchas veces a simplificar el trabajo.

4.3.2. Desarrollo de la herramienta de Simulación.

Openmodelica, cuenta con un Diagram View y un Text View. El primero ayuda a dibujar por diagrama de bloques y el segundo a editar un código; para simular ecuaciones de sistemas, cada uno cuenta con sus propias librerías.

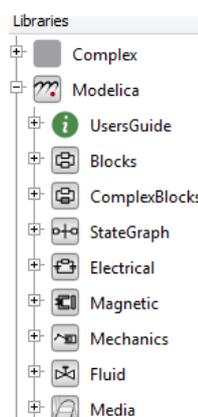
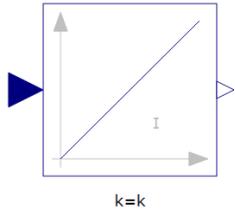
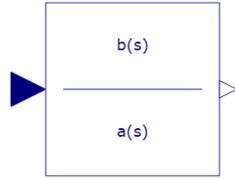


Figura 4. 69 Librerías OpenModelica.

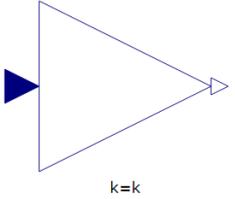
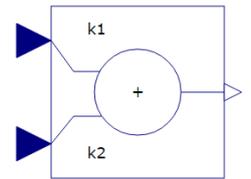
Describiendo uno a uno los bloques más utilizados en la simulación de ecuaciones diferenciales, tenemos:

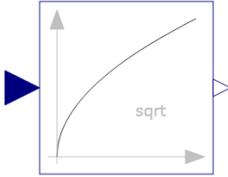
-DIAGRAM VIEW.

Modelica.Blocks.Continuous.

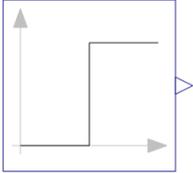
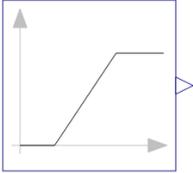
	<p>Bloque Integrator.</p> <p>Este bloque calcula la salida como parte integral de la entrada multiplicado por la ganancia k.</p>
	<p>Bloque Transferfunction.</p> <p>Este bloque define la función de transferencia entre la entrada y la salida.</p>

Modelica.Blocks.Math.

	<p>Bloque Gain.</p> <p>Este bloque calcula la salida como producto de la ganancia k con una entrada.</p>
	<p>Bloque Add.</p> <p>Este bloque calcula la salida como suma de las señales de entrada $k1$ y $k2$.</p>

	<p>Bloque Sqrt.</p> <p>Este bloque calcula la salida como raíz cuadrada de la entrada.</p>
---	---

Modelica.Blocks.Sources

	<p>Bloque Step.</p> <p>La salida real es una señal de paso.</p>
	<p>Bloque Ramp.</p> <p>La salida real es una señal rampa.</p>

-Text View.

<p>En el Text View, la escritura y códigos son similares a los de c++, a diferencia de ciertas clases o modelos que detallaremos.</p>	
<p>Model.-</p>	<p>Definición general para un programa, sin restricción.</p>
<p>Real.-</p>	<p>Permite definir variables en sus condiciones iniciales.</p>

Algorithm.-	Definición del inicio de un algoritmo a utilizar (if, for, while,...)
If.-	Evalúa una condición de verdad, con la ejecución de la verdadera o la falsa.
Equation.-	Definición del inicio de un sistema de ecuaciones.

Para poder visualizar las señales de salida en el programa, se las puede hacer mediante Plotting. Ubicado en la parte inferior de la ventana principal.

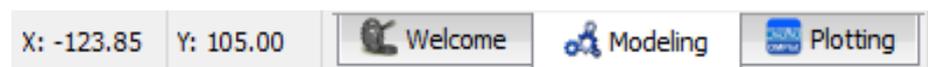


Figura 4. 70 Selección del área de trabajo.

Este programa, viene por default 1 seg de tiempo de simulado. Para realizar el ajuste, se lo efectúa desde la barra de herramientas. (Simulation >> Simulation Setup).

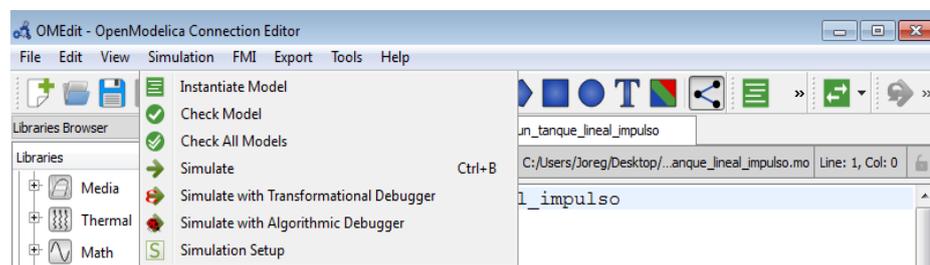


Figura 4. 71 Referencia simulation setup.

En la ventana de ajustes, el cambio a realizar es Stop time, como se indica en la figura 4.72.

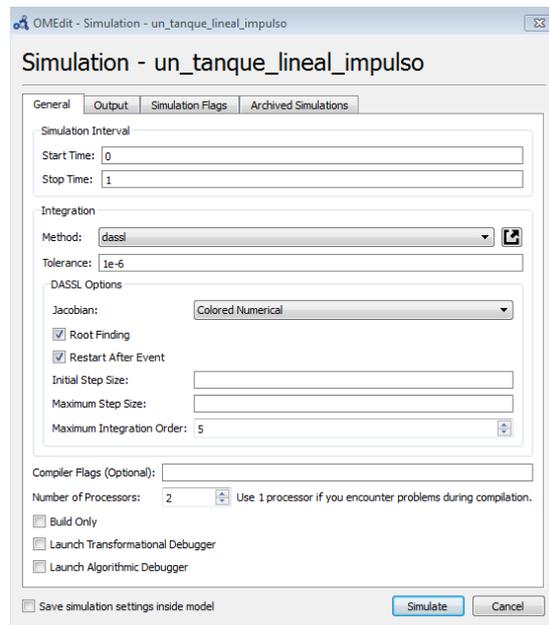


Figura 4. 72 Parámetros simulation setup

4.3.2.1. Análisis de un solo tanque con entradas Step, Impulse, Rampa mediante Diagram view y Text view.

Para poder realizar una simulación, se deberá nuevas clases de modelos.



New modélica Class

Las áreas de trabajo en modélica, son similares a las de Matlab o Scilab., como observamos en la figura 4.73 y 4.74.

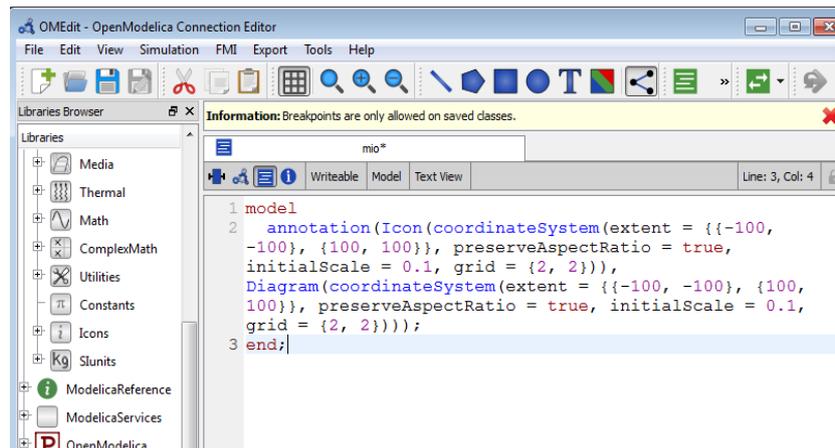


Figura 4. 73 Área de trabajo Text View.

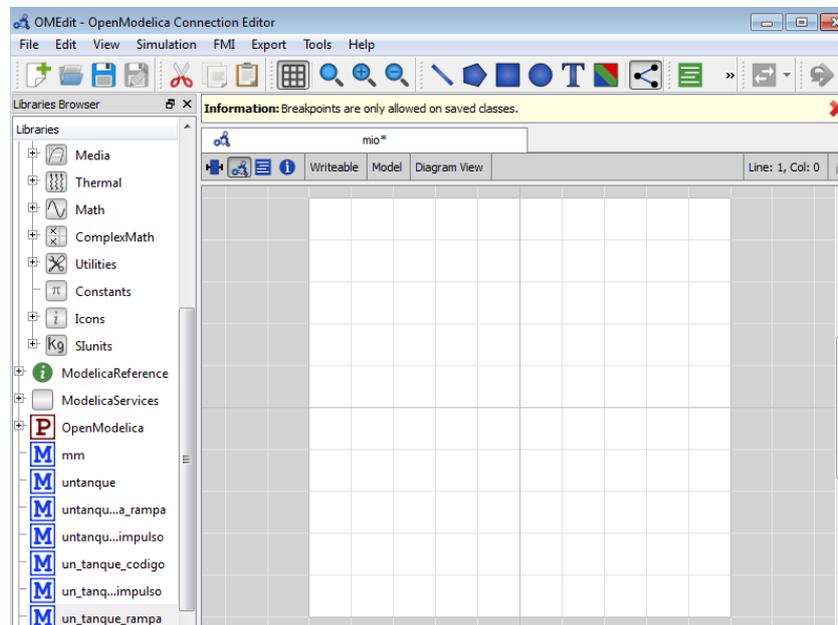


Figura 4. 74 Área de trabajo Diagram View.

Escalón.

El correcto comportamiento de los sistemas, dependerá únicamente de las ecuaciones que se obtenga en el modelamiento. Previamente se indicó para el Text las librerías que se utilizaran y en el Diagram los bloques así como las rutas para obtenerlos.

En la figura 4.75 y 4.76 se muestran la estructura de un código para el Text-View de modélica.

```

model un_tanque_nolineal
Real x(start = 0); //declaracion de condiciones iniciales
equation //escritura de ecuación
der(x) = (-0.443 * sqrt(x)) + 0.2;
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -
100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100},
{100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));
end un_tanque_nolineal;

```

Figura 4. 75 Código modelica entrada escalón, un tanque no lineal.

```

model un_tanque_codigo
Real x(start = 0); //declaracion de condiciones iniciales
equation //escritura de ecuación
der(x) = (-0.49 * x) + 0.1;
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));
end un_tanque_codigo;

```

Figura 4. 76 Código modelica entrada escalón, un tanque lineal.

Se deberá parametrizar ambas fuentes, como se muestra en la figura 4.77, para realizar el diagrama de la figura 4.78 y así obtener los resultados de las figuras 4.79, 4.80 y 4.81.

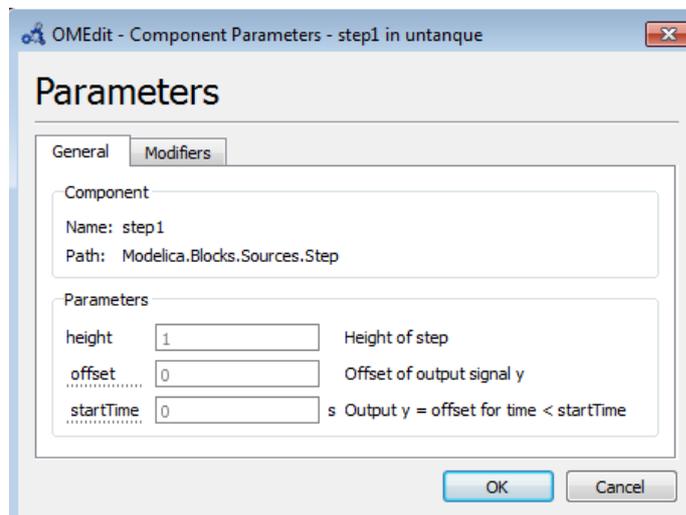


Figura 4. 77 Parámetros de step.

-Diagrama de bloques.

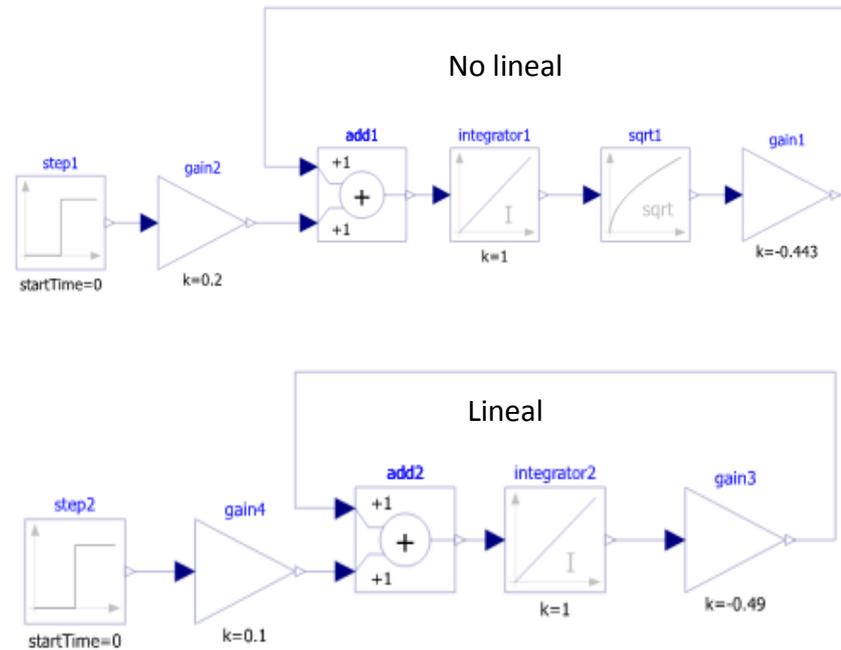


Figura 4. 78 Desarrollo de ecuaciones en Diagram-View un tanque.

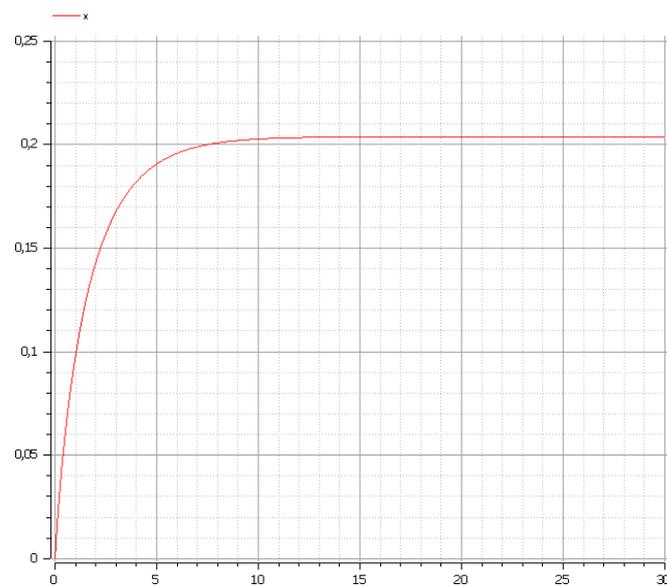


Figura 4. 79 Text View un tanque no lineal.

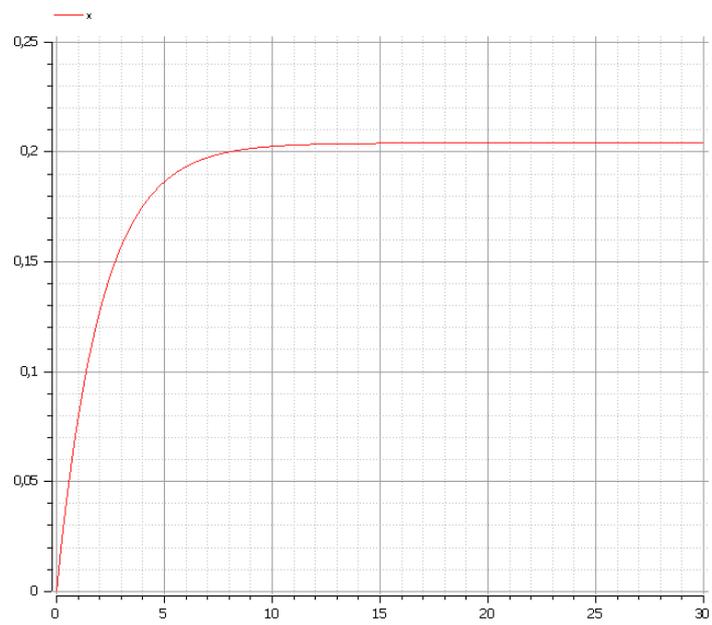


Figura 4. 80 Text View un tanque lineal.

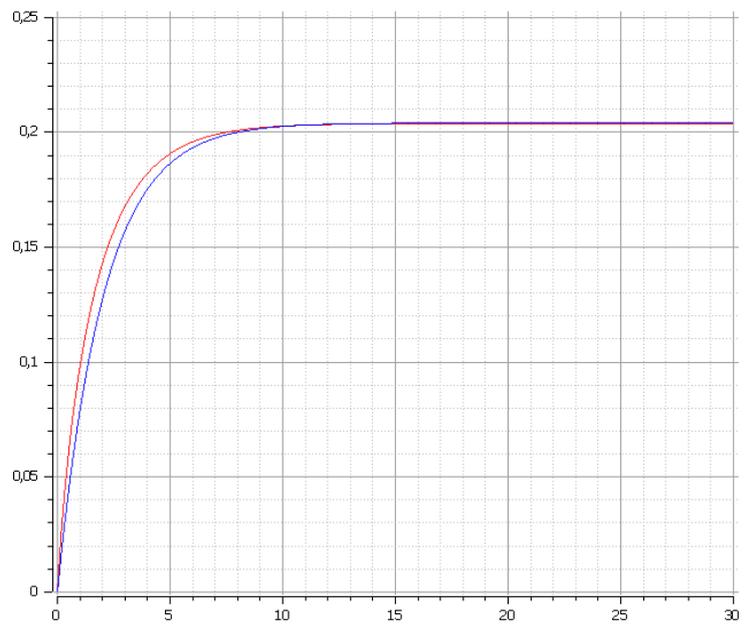


Figura 4. 81 Diagram view un tanque lineal y no lineal.

Impulso.

Modélica al igual que scilab y simulink, no presentan en sources la entrada impulse, se la debe elaborar.

Con la función if, se evaluó la salida de la variable u, para que de las señales de uno y cero variantes en el tiempo.

```
algorithm
u := 0;
if time > 0.025 and time < 0.05 then
u := 1;
else
u := 0;
end if;
```

Figura 4. 82 Estructura de un algorithm.

Las fuentes step, funcionan igual que en Matlab dentro de Diagram View, se hace la misma ponderación de parámetros y se efectúa una resta de las dos, para obtener un impulso cercano a cero de la misma condición que en if, como se muestra en la figura 4.83 y 4.84.

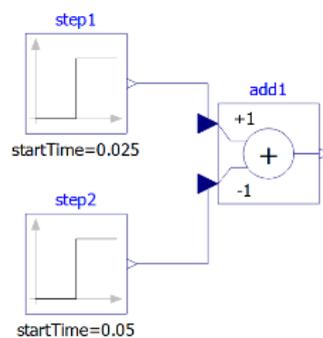


Figura 4. 83 Entrada impulso- Modelica.

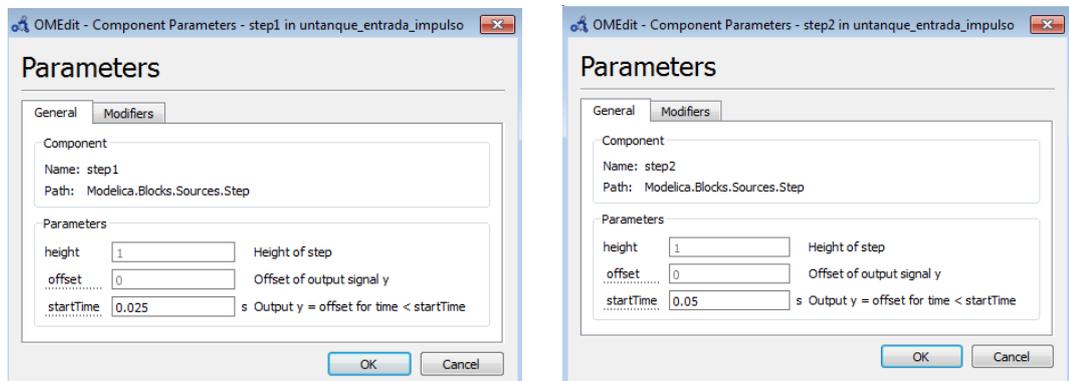


Figura 4. 84 Parámetros_steps.

En la figura 4.85 y 4.86 se muestra la realización del código y en la figura 4.87 la estructura del Diagram view.

```

model un_tanque_nolineal_impulso
Real x(start = 0); //declaracion de condiciones iniciales
Real u(start = 0);
algorithm//declaracion de algoritmo
u := 0;
if time > 0.025 and time < 0.05 then
u := 1;
else
u := 0;
end if;
equation//escritura de ecuación
der(x) = (-0.443 * sqrt(x)) + 0.2 * u;
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -
100}}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100},
{100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));
end un_tanque_nolineal_impulso;

```

Figura 4. 85 Código modelica entrada impulso, un tanque no lineal.

```

model un_tanque_lineal_impulso
Real x(start = 0); //declaracion de condiciones iniciales
Real u(start = 0);
algorithm//declaracion de algoritmo
u := 0;
if time > 0.025 and time < 0.05 then
u := 1;
else
u := 0;
end if;
equation//escritura de ecuación
der(x) = (-0.49 * x) + 0.1 * u;
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -
100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100},
{100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));
end un_tanque_lineal_impulso;

```

Figura 4. 86 Código modelica entrada impulso, un tanque no lineal.

En la figura 4.87 se muestra la estructura del Diagram View.

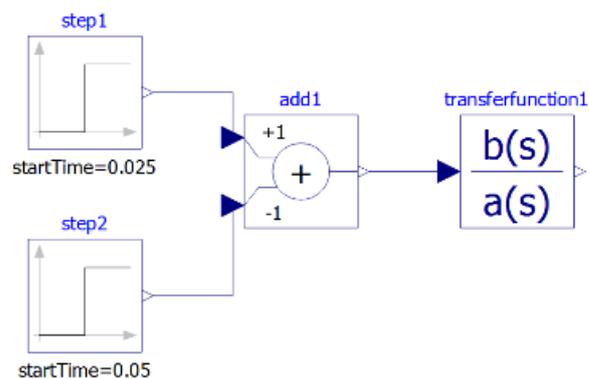


Figura 4. 87 Diagram View Transfer function un tanque impulso.

Obteniendo así los resultados en las figuras 4.88, 4.89 y 4.90.

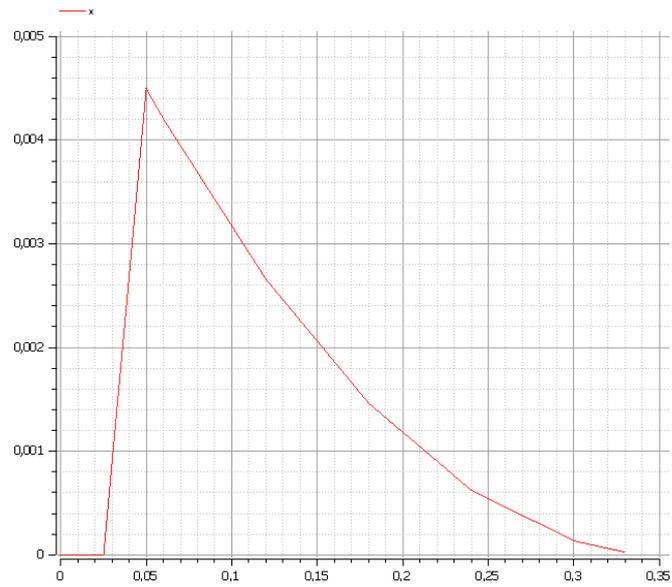


Figura 4. 88 Un tanque Text View no lineal.

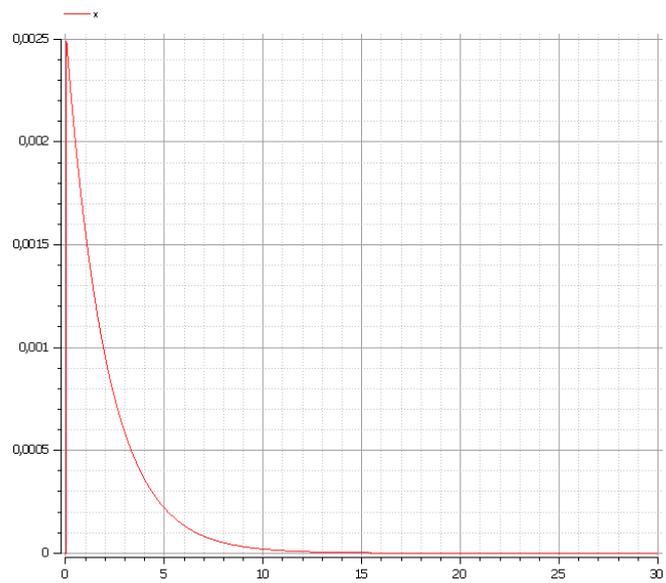


Figura 4. 89 Un tanque Text View lineal.

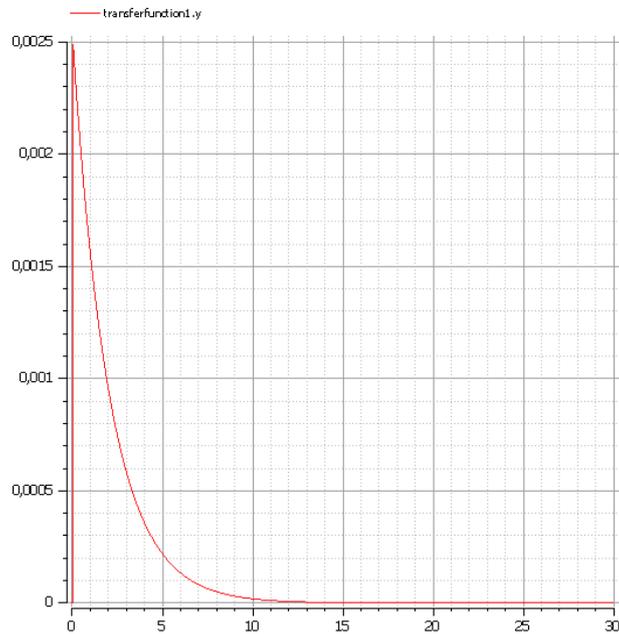


Figura 4. 90 Diagram View un tanque.

Rampa.

La fuente rampa está presente en Openmodelica, los parámetros que se asignan, se programan de igual forma que en Matlab y Scilab. La rampa es de magnitud 1 cambiante.

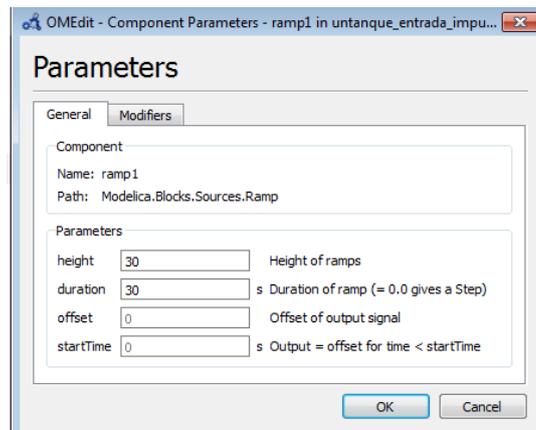


Figura 4. 91 Parámetros de rampa.

En la figura 4.92 y 4.93 se observa el código realizado en OpenModelica, así como el diagrama en la figura 4.94.

```

model un_tanque_nolineal_rampa
Real x(start = 0);
equation
der(x) = (-0.443 * sqrt(x)) + 0.2 * time;
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));
end un_tanque_nolineal_rampa;

```

Figura 4. 92 Código modelica entrada rampa, un tanque no lineal.

```

model un_tanque_rampa
Real x(start = 0);
equation
der(x) = (-0.49 * x) + 0.1 * time;
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));
end un_tanque_rampa;

```

Figura 4. 93 Código modelica entrada rampa, un tanque lineal.

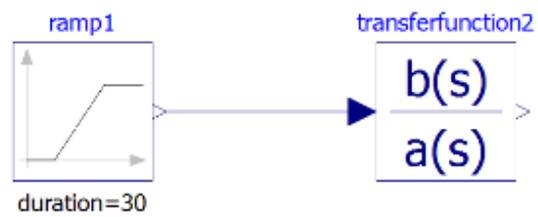


Figura 4. 94 Diagrama View un tanque transferfunction.

En las figuras 4.95, 4.96 y 4.97, se visualizan los resultados de las respectivas programaciones.

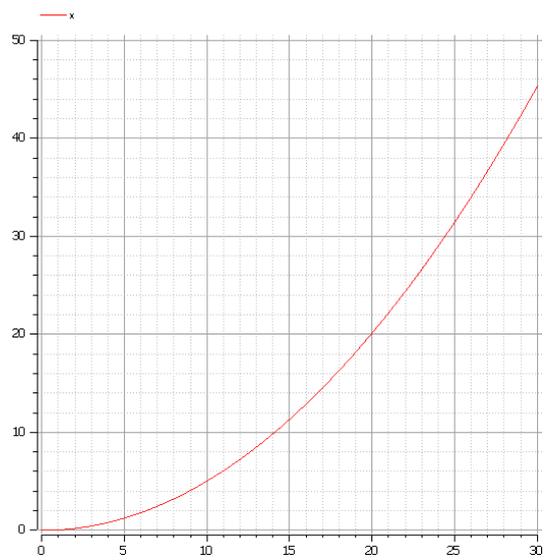


Figura 4. 95 Text View un tanque no lineal.

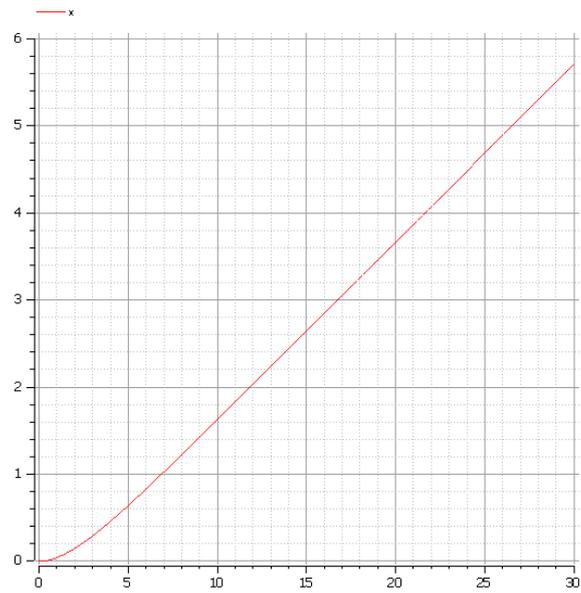


Figura 4. 96 Text View un tanque lineal.

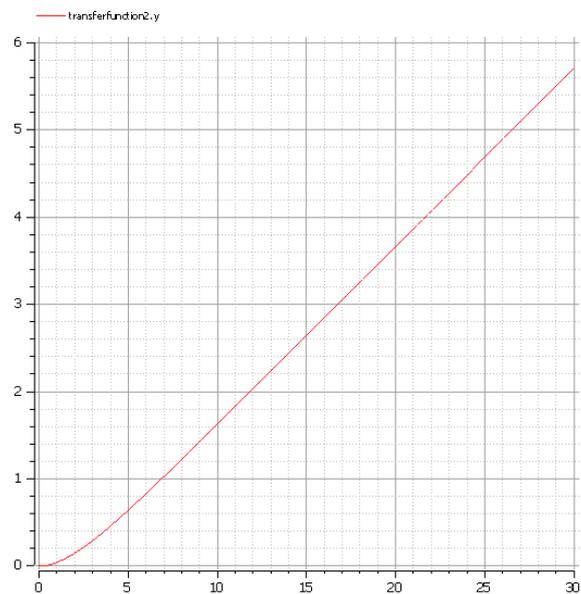


Figura 4. 97 Diagram View un tanque.

4.3.2.2. Análisis de dos tanques en serie con entradas Step, Impulse, Ramp mediante Diagram view y Text view.

Los parámetros de fuentes, fueron ya explicados en el análisis anterior, en este solo veremos los cambios que existen en los algoritmos y los diagramas, por el aumento del segundo tanque.

Escalón.

En las figuras 4.98, 4.99, 4.100 y 4.101 se observa el desarrollo del código en Text View y Diagram View para modélica.

```

model dos_tanques_nolineal_escalon_unitario
Real x1(start = 0);
Real x2(start = 0);
equation
der(x1) = (-0.443 * sqrt(x1 - x2)) + 0.2;
der(x2) = 0.443 * sqrt(x1 - x2) - 0.443 * sqrt(x2);
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));

```

Figura 4. 98 Código Modelica entrada escalón, dos tanques no lineal.

```

model dos_tanques_escalon_unitario
Real x1(start = 0);
Real x2(start = 0);
equation
der(x1) = (-0.49 * x1) - (-0.49 * x2) + 0.1;
der(x2) = 0.49 * x1 - 0.98 * x2;
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -
100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100},
{100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));

```

Figura 4. 99 Código modelica entrada escalón, dos tanques lineal.

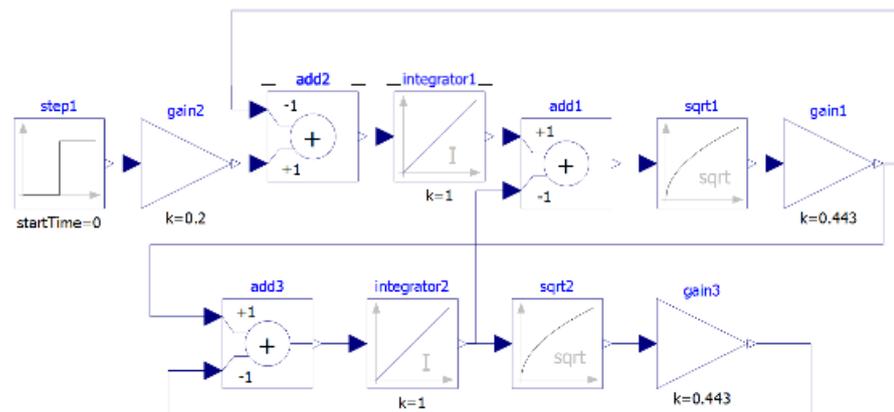


Figura 4. 100 Diagram View sistema no lineal dos tanques-escalón.

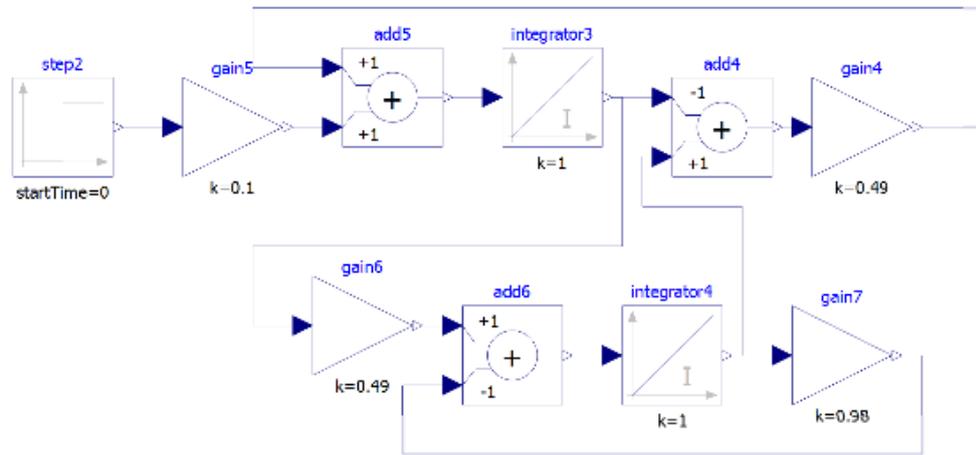


Figura 4. 101 Diagram View sistema lineal dos tanques-escalón.

Obteniendo los resultados en las figuras 4.102, 4.103,
4.104, 4.105.

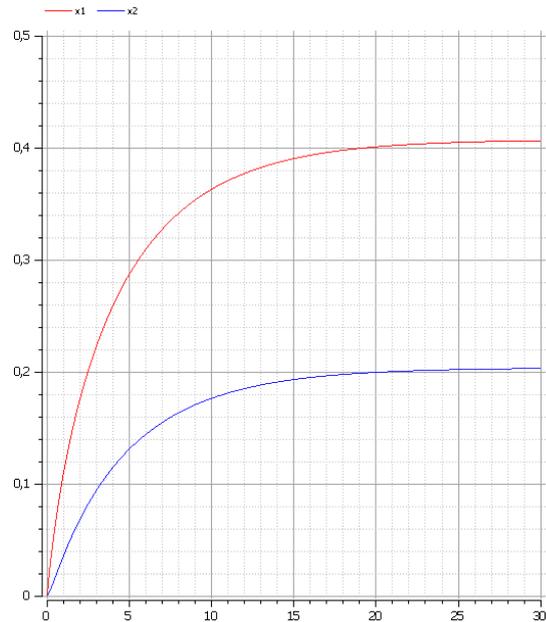


Figura 4. 102 Simulado de ecuaciones no lineales entrada escalón.

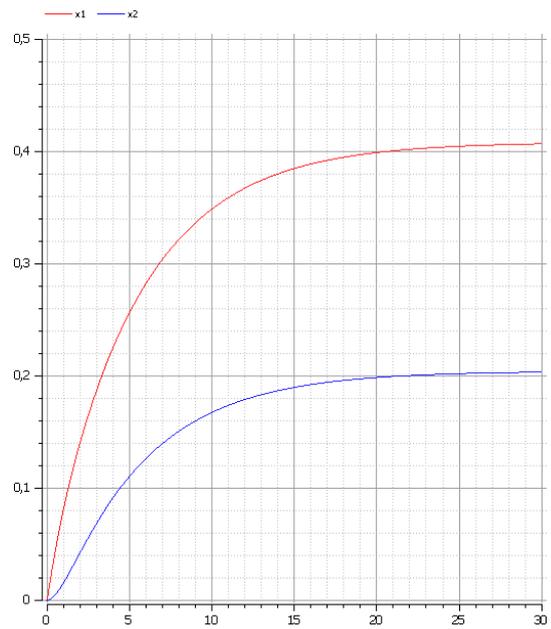


Figura 4. 103 Simulado de ecuaciones lineales entrada escalón.

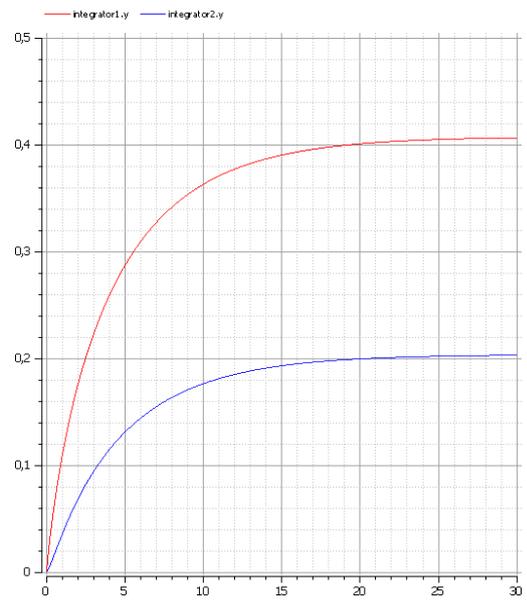


Figura 4. 104 Simulado de ecuaciones no lineales entrada escalón-Diagram.

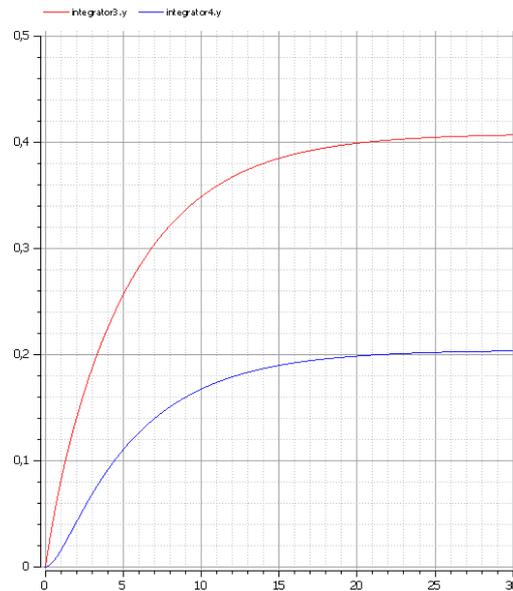


Figura 4. 105 Simulado de ecuaciones lineales entrada escalón-Diagram.

Impulso.

En las figuras 4.106 y 4.107 se detalla el código empleado en modelica y en la figura 4.108 el diagrama.

```

Real x1(start = 0);
Real x2(start = 0);
Real u(start = 0);
algorithm
  u := 0;
  if time > 0.025 and time < 0.05 then
    u := 1;
  else
    u := 0;
  end if;
equation
  der(x1) = (-0.443 * sqrt(x1 - x2)) + 0.2 * u;
  der(x2) = 0.443 * sqrt(x1 - x2) - 0.443 * sqrt(x2);

```

Figura 4. 106 Código modelica entrada impulso, dos tanques no lineal.

```

model dos_tanques_entrada_impulso
Real x1(start = 0);
Real x2(start = 0);
Real u(start = 0);
algorithm
u := 0;
if time > 0.025 and time < 0.05 then
u := 1;
else
u := 0;
end if;
equation
der(x1) = (-0.49 * x1) - (-0.49 * x2) + 0.1 * u;
der(x2) = 0.49 * x1 - 0.98 * x2;
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -
100}}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}},
{100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));
end dos_tanques_entrada_impulso;

```

Figura 4. 107 Código modelica entrada impulso, dos tanques lineal.

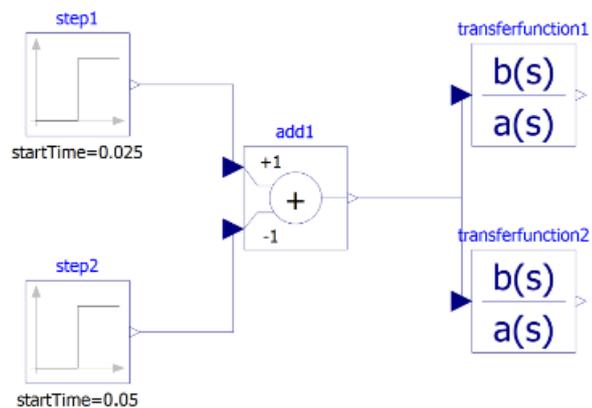


Figura 4. 108 Diagram view, dos tanques transferfunction.

Visualizando los resultados en las figuras 4.109, 4.110 y 4.111.

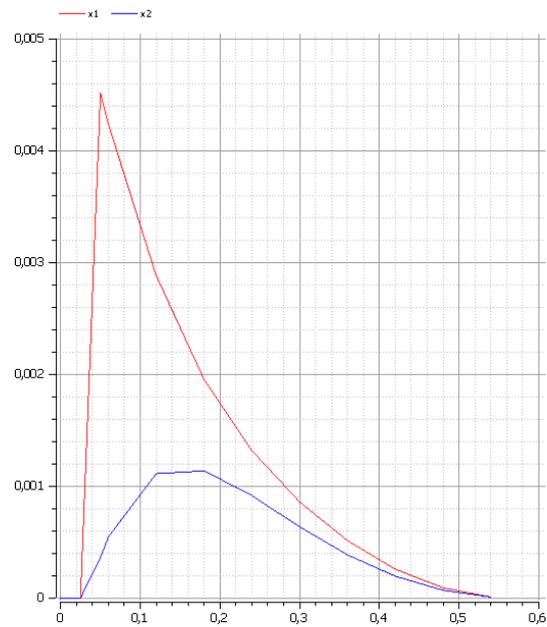


Figura 4. 109 Dos tanques entrada Impulso no lineal-Text.

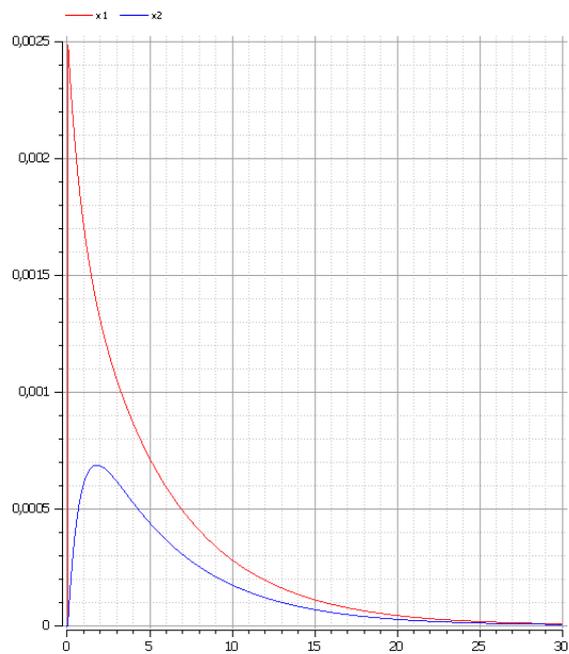


Figura 4. 110 Dos tanques entrada Impulso lineal-Text.

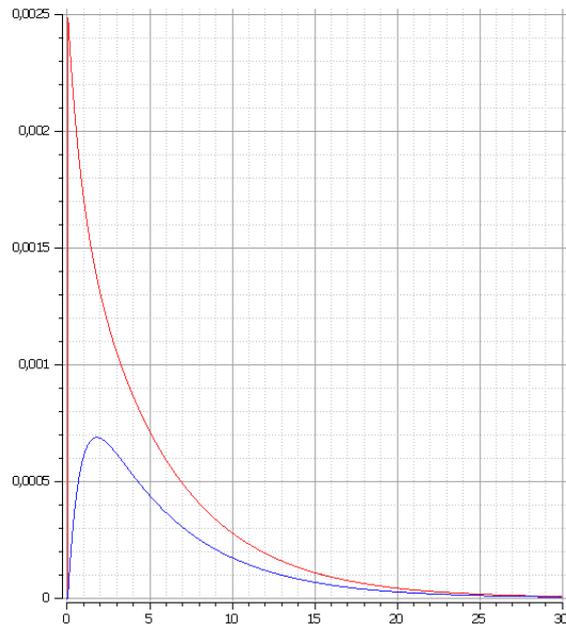


Figura 4. 111 Dos tanques entrada Impulso-Diagram.

Rampa.

En las figuras 4.112 y 4.113 se detalla el código empleado en modelica y en la figura 4.114 el diagrama.

```

model dos_tanques_nolineal_rampa
Real x1(start = 0);
Real x2(start = 0);
equation
der(x1) = (-0.443 * sqrt(x1 - x2)) + 0.2 * time;
der(x2) = 0.443 * sqrt(x1 - x2) - 0.443 * sqrt(x2);
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));
end dos_tanques_nolineal_rampa;

```

Figura 4. 112 Código modelica entrada rampa, dos tanques no lineal.

```

model dos_tanques_rampa
Real x1(start = 0);
Real x2(start = 0);
equation
der(x1) = (-0.49 * x1) - (-0.49 * x2) + 0.1 * time;
der(x2) = 0.49 * x1 - 0.98 * x2;
annotation(Icon(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true,
initialScale = 0.1, grid = {2, 2})),
Diagram(coordinateSystem(extent = {{-100, -100}, {100, 100}}, preserveAspectRatio = true, initialScale =
0.1, grid = {2, 2})));
end dos_tanques_rampa;

```

Figura 4. 113 Código modelica entrada rampa, dos tanques no lineal.

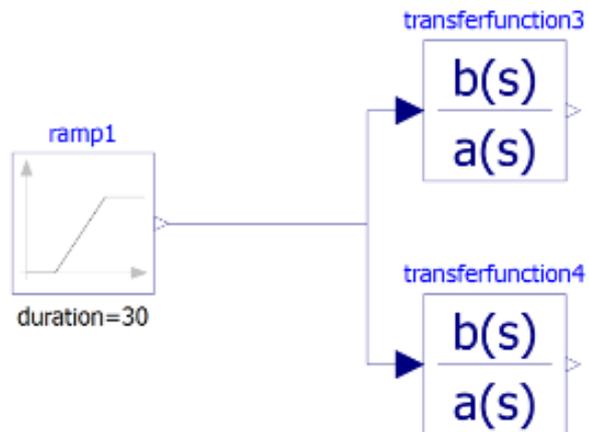


Figura 4. 114 Transferfunction-Diagram view rampa.

Obteniendo los resultados en las figuras 4.115 y 4.116.

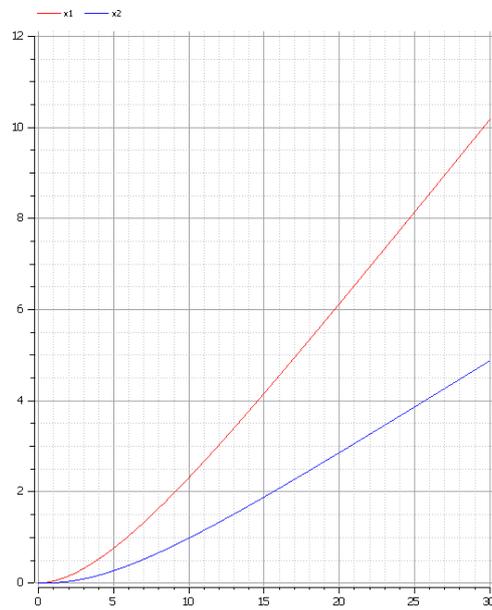


Figura 4. 115 Rampa dos tanques lineal.

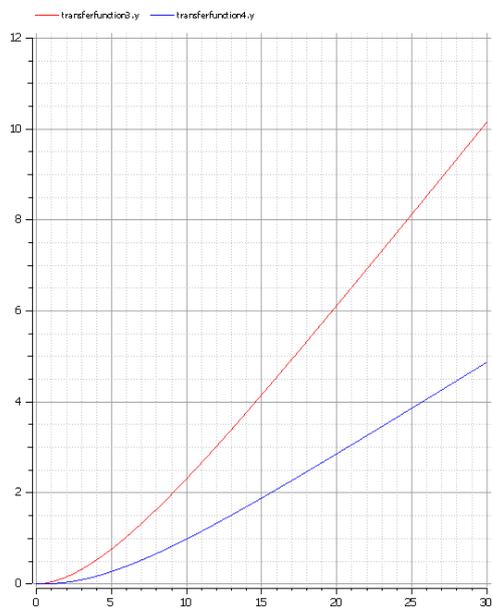


Figura 4. 116 Diagram view dos tanques solución.

RESULTADOS

Comparación entre simuladores que se usaron: Matlab, Scilab, Modelica.

Para realizar la comparación se asumirá que es un error, aunque no lo es, sino una diferencia.

Tabla 2 Resultados comparativos de Matlab, Scilab, Modelica en el llenado de un tanque (no lineal).

TIEMPO (Sg)	1	2	3	4	5
ALTURA (m) MATLAB	0.09822	0.1431	0.1678	0.1822	0.1907
ALTURA (m) SCILAB	0.0919	0.1397	0.1659	0.1810	0.19
ALTURA (m) MODELICA	0.0982	0.1431	0.1678	0.1822	0.1907

Expresión para calcular el error entre datos de cada simulador.

$$error = \frac{|v_{defensor} - v_{retador}|}{v_{retador}} * 100\%$$

Tabla 3 Errores entre datos de simuladores, llenado de un tanque (no lineal).

TIEMPO (Sg)	1	2	3	4	5
MATLAB VS SCILAB	6.88%	2.43%	1.14%	0.66%	0.36%
MATLAB VS MODELICA	0.02%	0%	0%	0%	0%
SCILAB VS MODELICA	6.42%	2.43%	1.14%	0.66%	0.36%

En las tablas 2, 4 y 6 están los valores de frontera que cada uno de los simuladores, en tiempos de 1 a 5 segundos, para después calcular el error con respecto a cada simulador (tablas 3, 5 y 7).

Tabla 4 Resultados comparativos de Matlab, Scilab, Modelica en el llenado de dos tanques (tanque uno-no lineal).

TIEMPO (Sg)	1	2	3	4	5
ALTURA (m) MATLAB	0.1099	0.1758	0.2232	0.2593	0.2874
ALTURA (m) SCILAB	0.1018	0.1702	0.2191	0.2561	0.2848
ALTURA (m) MODELICA	0.1099	0.1758	0.2232	0.2593	0.2874

Tabla 5 Errores entre datos de simuladores, llenado de dos tanques (tanque uno-no lineal).

TIEMPO (Sg)	1	2	3	4	5
MATLAB Vs SCILAB	7.96%	3.29%	1.87%	1.24%	0.91%
MATLAB VS MODELICA	0%	0%	0%	0%	0%
SCILAB VS MODELICA	7.96%	3.29%	1.14%	0.66%	0.36%

Tabla 6 Resultados comparativos de Matlab, Scilab, Modelica en el llenado de dos tanques (tanque dos-no lineal).

TIEMPO (Sg)	1	2	3	4	5
ALTURA (m) MATLAB	0.03603	0.06863	0.09442	0.1149	0.1312
ALTURA (m) SCILAB	0.0324	0.0657	0.0921	0.1130	0.1297
ALTURA (m) MODELICA	0.036	0.0686	0.0944	0.1149	0.1312

Tabla 7 Errores entre datos de simuladores, llenado de dos tanques (tanque dos-no lineal).

TIEMPO (Sg)	1	2	3	4	5
MATLAB Vs SCILAB	11.20%	4.46%	2.52%	1.68%	1.15%
MATLAB VS MODELICA	0.08%	0.044%	0.021%	0%	0%
SCILAB VS MODELICA	10%	4.22%	2.43%	1.65%	1.14%

CONCLUSIONES

1. Los sistemas de segundo orden, no siempre presentan las características que tienen los de su tipo, sino similares a los que tiene uno de orden inferior; como lo observamos el sistema de dos tanques (segundo orden) tiene igual comportamiento que el de un tanque (primer orden), siendo comprobadas con el teorema de valor final con entrada escalón unitario (un tanque 0,204; dos tanques 0,3867 y 0,1935); son iguales que sus señales de entrada.
2. El tiempo de respuesta en sistemas lineales es menor que en los no lineales, pero no siempre un sistema simulado puede garantizar que se asemeje a la realidad.
3. Como usuarios de los programas de simulación (Matlab, Scilab y Modelica), encontramos aspectos de éstos, que nos permiten diferenciarlos notando sus puntos débiles y puntos a favor de uno sobre otro. Aspectos como: la funcionalidad básica, donde no se encontró alguna diferencia ya que los tres nos permiten realizar cálculos con matrices de igual forma, con funciones de transferencia y polinomios. Con lo que respecta a funciones avanzadas los tres constan de paquetes de herramientas, sin embargo Matlab es un programa con ya algunos años en el mercado ayudando

académicamente que cuenta con mayor número de funciones, modelica lo seguiría por presentar paquetes novedosos para experimentar con modelaje no solo eléctricos, sino también con modelos hidráulicos, mecánicos entre otros; y al final Scilab un programa en vía de desarrollo, otro de los aspectos que llamo nuestra atención es la fiabilidad, el rendimiento del programa en su ejecución no se encontró ningún inconveniente en ninguno de los tres.

4. Es claro que los programas no siempre tendrán el mismo lenguaje de programación, tal vez similar, se observó que aunque se realice un código con la misma finalidad para los tres simuladores, Modelica se distingue, si bien obtiene iguales valores numéricos que Matlab, la programación que ésta utiliza es más corta y sencilla debido a que su lenguaje es más específico para trabajar con ecuaciones matemáticas.
5. Tal vez se piense descartar a Scilab como simulador de modelos, se lo podría dejar en tercer plano u opción, ya que presenta muchos inconvenientes en el momento de comparar resultados, los scope no pueden mostrar dos señales al mismo tiempo, solo muestra una a la vez.

RECOMENDACIONES

1. Se recomienda el estudio y uso de los simuladores OpenModelica y Scilab, en la universidad, para así reemplazar programas que necesitan la compra de licencias
2. Se recomienda al momento de ejecutar OpenModelica que solo se esté ejecutando un solo proceso, sino tomará más tiempo en compilación.
3. Usar la conversión de Matlab a Scilab es poco recomendable, pues ciertos parámetros de programación cambian y lo único que esta opción hace es pasar el código de un programa a otro sin tener éxito del que se haya obtenido en el anterior.
4. Conocer previamente el sistema que se va a tratar en simulación ayudara mucho en corroborar resultados.
5. Al usuario se recomienda leer el manual de los programas para poder realizar una óptima simulación.

6. Se recomienda no solo a maestros y alumnos de la Espol el uso de Modelica; ya que es un software libre que cumple los mismos objetivos de Matlab.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Ojea, G. (2007, 7 de marzo). Sistemas, señales y modelos in <http://isa.uniovi.es/docencia/adsii/Cap.I.pdf>
- [2] Brito-Vanilla, M. Alemán, I. Fraga, E. García, J. Arias de Tapia. (2011, Agosto). Paper Role of mathematical modeling in the training of engineers. Recuperado en http://scielo.sld.cu/scielo.php?pid=S1815-59442011000200005&script=sci_arttext
- [3] Duarte, O. Análisis de sistemas dinámicos lineales, Universidad Nacional de Colombia M. J. Willis and M. T. Tham, "Advanced Process Control," in <http://lorien.ncl.ac.uk/ming/advcontrl/sect2.htm#b1> Newcastle University, 1994.
- [4] R. Johansson, "System Modeling and Identification," in *Information and System Sciences* New Jersey: Prentice Hall, 1993.
- [5] Morón J., Señales y Sistemas, Universidad Rafael Urdaneta, 2011.
- [6] D. Laurí, Reducción de variables en la identificación de modelos lineales para Mpc, Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales, pg. 9-10, 2008.
- [7] J. Isach, Sistemas lineales de primer orden, pg. 27. Recuperado de <http://galeón.com/mcoronado/MODELAMIENTO/02PORDT1.PDF> , 2007

[8] Katsuhiko Ogata. Ingeniería de control moderna, Pearson Education, S.A. Madrid, pg. 112, 2003.

[9] Furic. "Using Modelica under Scilab/Scicos",
<http://www.scicos.org/ScicosModelica/Formation/Documentation/Introduction%20to%20Modelica.pdf>

[10] <http://www.scilab.org/support/documentation/tutorials>